INNOVATIVE PUBLICATION

Vol.4 №5 (2026). MAY

Journal of Effective Learning and Sustainable Innovation

innovativepublication.uz

RIMAN METRIKASI VA MASOFA TUSHUNCHASI

Saliyeva Sevara Ma'mirbek qizi,
Andijon davlat pedagogika instituti "Matematika va Informatika" kafedrasi o'qituvchisi
E-mail: saliyevasevara18@gmail.com
Olimjonova Nigora Odiljon qizi
Andijon davlat pedagogika instituti "Aniq va tabiiy " fanlar fakulteti Matematika yo`nalishi 2-kurs talabasi
nigoraolimjonova90@gmail.com

Annotatsiya. Mazkur maqola differensial geometriya va topologiyaning markaziy tushunchalaridan biri hisoblangan Riman metrikasi hamda uning yordamida silliq ko'paxilliklarda masofa tushunchasining shakllanishiga bag'ishlangan. Ishda evklid geometriyasidagi masofa tushunchasining umumiy egrilikka ega bo'lgan fazolar uchun umumlashtirilishi nazariy jihatdan asoslab berilgan. Tadqiqot davomida Riman metrikasi silliq ko'paxillikning har bir nuqtasida urinma fazoda aniqlangan musbat aniqlangan simmetrik bilinear forma (metrik tenzor) sifatida tahlil qilinadi. Maqolada metrik tenzor yordamida egri chiziq yoyi uzunligini hisoblash usullari ko'rib chiqilgan va ikki nuqta orasidagi eng qisqa masofani ifodalovchi geodezik chiziqlar tushunchasiga alohida to'xtalib o'tilgan. Shuningdek, Riman masofasining metrik fazo aksiomalarini qanoatlantirishi va uning ko'paxillik topologiyasi bilan bog'liqligi ko'rsatilgan. Ushbu material differensial geometriya, variatsion hisob va umumiy nisbiylik nazariyasi bilan shug'ullanuvchi tadqiqotchilar hamda oliy o'quv yurtlarining matematika yo'nalishi talabalari uchun nazariy manba bo'lib xizmat qiladi.

Kalit so`zlar. Riman metrikasi, metrik tenzor, masofa funksiyasi, geodezik chiziq, silliq ko'paxillik, urinma fazo, egrilik tenzori, egri chiziq uzunligi, differensial forma, metrik fazo, kovariant hosila, seksion egrilik, Riman geometriyasi, variatsion hisob, topologik tuzilish, Gamilton funksiyasi, Evklid bo'lmagan geometriya.

Abstract. This article is devoted to the Riemannian metric, which is considered one of the central concepts of differential geometry and topology, and the formation of the concept of distance in smooth manifolds with its help. The work theoretically justifies the generalization of the concept of distance in Euclidean geometry to spaces with general curvature. During the research, the Riemannian metric is analyzed as a positively definite symmetric bilinear form (metric tensor) defined in the space of a smooth manifold at each point. The article considers methods for calculating the length of a curved arc using the metric tensor and specifically addresses the concept of geodesics, which represent the shortest distance between two points. It also shows that the Riemannian distance satisfies the axioms of metric spaces and its connection with the topology of manifolds. This material serves as a theoretical resource for researchers engaged in differential geometry, the calculus of variations, and the theory of general relativity, as well as students of mathematics at higher educational institutions.

Keywords. Riemannian metric, metric tensor, distance function, geodesic line, smooth manifold, tangent space, curvature tensor, curve length, differential form, metric space, covariant derivative, sectional curvature, Riemannian geometry, calculus of variations, topological structure, Hamiltonian function, non-Euclidean geometry.

Аннотация. Данная статья посвящена римановой метрике, которая считается одним из центральных понятий дифференциальной геометрии и топологии, а также формированию с её помощью понятия расстояния на гладких многообразиях. В работе теоретически обосновывается обобщение понятия расстояния в евклидовой геометрии на пространства с общей кривизной. В ходе исследования риманова метрика анализируется как положительно определённая симметричная билинейная форма (метрический тензор), определённая в пространстве гладкого многообразия в каждой точке. В статье рассматриваются методы вычисления длины искривлённой дуги с использованием метрического тензора и конкретно затрагивается понятие геодезических, представляющих кратчайшее расстояние между двумя точками. Также показано, что риманово расстояние удовлетворяет аксиомам метрических пространств и его связи с топологией многообразий. Данный материал служит теоретическим ресурсом для исследователей, занимающихся дифференциальной геометрией, вариационным исчислением и теорией общей относительности, а также для студентов-математиков высших учебных заведений.

Ключевые слова: Риманова метрика, метрический тензор, функция расстояния, геодезическая, возможное многообразие, пространство усилий, тензор кривизны, криволинейное оружие, дифференциальная форма, метрическое пространство, ковариантная производная, секционная кривизна, риманова геометрия, вариационное исчисление, топологическая структура, негамильтонова функция, евклидово существование.

Hozirgi zamon matematika va fizikasi rivojida geometriyaning oʻrni nihoyatda muhim hisoblanadi. Ayniqsa, oddiy Evklid geometriyasidan tashqariga chiqib, murakkab fazolarni oʻrganishga ehtiyoj ortib bormoqda. Shu sababli, fazodagi masofa va oʻlchash tushunchalarini umumiy holatda ifodalovchi Riman metrikasi va unga bog'liq bo'lgan masofa tushunchasi zamonaviy matematikaning dolzarb yo'nalishlaridan biri sifatida qaraladi. Riman geometriyasi nafaqat nazariy matematika uchun, balki amaliy sohalar uchun ham katta ahamiyatga ega. Chunki real hayotdagi ko'plab jarayonlar tekis fazoda emas, balki egri sirtlar yoki murakkab geometrik strukturalarda sodir bo'ladi. Masalan, Yer sharining sirtida masofani hisoblash, navigatsiya tizimlari, geodeziya, kartografiya kabi sohalarda masofa oddiy tekislik formulasiga bo'ysunmaydi. Bunday holatlarda masofa tushunchasini to'g'ri aniqlash va hisoblash uchun Riman metrikasidan foydalaniladi.

Masofa tushunchasi matematikaning eng asosiy va fundamental tushunchalaridan biri bo'lib, u obyektlar orasidagi yaqinlik va uzoqlik darajasini miqdoriy jihatdan ifodalashga xizmat qiladi. Masofa tushunchasi dastlab klassik geometriyada paydo bo'lgan bo'lsa-da, keyinchalik matematik analiz, topologiya, differensial geometriya va funksional analiz kabi sohalarda umumlashtirilib, ilmiy asoslangan nazariy tushunchaga aylangan. Masofa tushunchasining asosiy mazmuni shundan iboratki, u ikki nuqta orasidagi farqni real son orqali ifodalaydi va shu orqali fazoda obyektlarning o'zaro joylashuvini, harakatini va uzluksiz o'zgarishini aniqlash imkonini beradi. Aynan masofa tushunchasi orqali matematikada limit, yaqinlashuv, uzluksizlik, ochiqlik kabi tushunchalar qat'iy ta'riflanadi.

Masofa tushunchasining klassik ko'rinishi (Evklid masofasi). Masofa tushunchasi tarixan Evklid geometriyasi bilan bog'liq. Tekislikda $x = (x_1, x_2)$ va $y = (y_1, y_2)$ nuqtalar orasidagi masofa quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

Bu formula Pifagor teoremasiga asoslanadi va tekislikdagi eng asosiy masofa o'lchovi hisoblanadi.

Agar fazo R_n ko'rinishida bo'lsa, ya'ni n-o'lchamli Evklid fazoda nuqtalar $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ va $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ bo'lsa, u holda masofa quyidagicha aniqlanadi:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Bu formula Evklid masofasining umumlashgan koʻrinishi boʻlib, fazodagi real geometrik masofani ifodalay Masofa tushunchasining matematikadagi umumlashgan shakli metrika boʻlib, metrika kiritilgan toʻplam metrik fazo deb ataladi. Metrik fazo tushunchasi topologiya va matematik analizning eng muhim asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi. Chunki metrik fazoda limit, uzluksizlik, ochiq va yopiq toʻplamlar, yaqinlashuv kabi tushunchalarni qat’iy aniqlash mumkin boʻladi.

Metrik fazo ta’rifi.Agar X toʻplam va d metrika boʻlsa, ya’ni

$$d: X \times X \to R$$

funksiya quyidagi aksiomalarni bajarsa:

1$d(x, y) \geq 0$

2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

3.$d(x, y) = d(y, x)$

4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

u holda (X, d) juftlik metrik fazo deyiladi.Metrik fazo topologiya uchun juda muhim, chunki masofa mavjud boʻlsa, yaqinlik tushunchasi ham avtomatik tarzda aniqlanadi.

Metrik fazoning asosiy xossalari.Metrik fazo nazariyasida bir nechta asosiy xossalar mavjud boʻlib, ular topologik tushunchalarni oʻrganishda muhim rol oʻynaydi.

1. Ochiq shar va yopiq shar tushunchalari.Metrik fazoda $x \epsilon X$ nuqta va $r > 0$ radius uchun ochiq shar quyidagicha aniqlanadi:

$$B(x, r) = \{y \epsilon X: d(x, y) < r\}$$

Bu yerda $B(x, r)$ — markazi x boʻlgan radiusi r ga teng ochiq shar.Yopiq shar esa quyidagicha aniqlanadi:

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in X: d(x, y) \leq r\}$$

Bu sharlar metrik fazoda ochiq va yopiq toʻplamlarni hosil qilish uchun asos boʻladi.

2. Ochiq to‘plam va yopiq to‘plamlarning metrik ta’rifi.To‘plam $U \subseteq X$ ochiq deyiladi, agar har bir $x \in U$ uchun shunday $r > 0$ topilsinki:

$$B(x,r) \subseteq U$$

Bu shart shuni bildiradiki, ochiq to‘plamning har bir nuqtasi atrofida kichik ochiq shar mavjud va u to‘liq shu to‘plam ichida joylashadi.

Yopiq to‘plam ta’rifi.To‘plam $F \subseteq X$ yopiq deyiladi, agar uning to‘ldiruvchisi ochiq bo‘lsa:

$$X \setminus F$$

3.Limit va yaqinlashuv tushunchasi.Metrik fazoda ketma-ketlikning yaqinlashuvi masofa orqali aniqlanadi.$\{x_n \subseteq X\}$ ketma-ketlik $x \in X$ nuqtaga yaqinlashadi deyiladi, agar:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}: n > N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$

Bu ta’rif limitning metrik ta’rifi hisoblanadi.Demak, metrik fazo tushunchasi matematik analizdagi limit nazariyasining asosidir.

4. Koshi ketma-ketlik .Metrik fazoda juda muhim tushunchalardan biri Koshi ketma-ketlik tushunchasidir.Ketma-ketlik $\{x_n\}$ Koshy ketma-ketlik deyiladi, agar:

$$\forall > 0\, \exists N \in \mathbb{N}: m, n > N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Bu shart shuni bildiradiki, ketma-ketlikning oxirgi elementlari bir-biriga tobora yaqinlashib boradi.Bu tushuncha fazoning to‘liqligini aniqlashda ishlatiladi.

Xulosa qilib aytganda, ushbu maqolada Riman metrikasi va masofa tushunchasi chuqur nazariy jihatdan o‘rganildi hamda ularning matematik geometriyadagi o‘rni va ahamiyati tahlil qilindi. O‘rganish jarayonida metrik fazolar haqidagi umumiy tushunchalardan boshlab, Riman geometriyasining asosiy g‘oyalari va ularning kengaytirilgan ko‘rinishlari ko‘rib chiqildi. Riman metrikasi oddiy Evklid geometriyasidan farqli ravishda, egri fazolarda masofani aniqlash imkonini berishi bilan katta ahamiyatga ega ekanligi aniqlandi. Bu esa real hayotdagi ko‘plab jarayonlarni to‘g‘ri matematik modellashtirishda muhim rol o‘ynaydi. Xususan, fazoning egriligi hisobga olinadigan holatlarda masofa tushunchasi oddiy chiziqli formula bilan ifodalanmasligi, balki metrik tensor orqali aniqlanishi muhim xulosa sifatida ko‘rsatildi. Shuningdek, Riman metrikasi yordamida yoy uzunligi, geodezik chiziqlar va eng qisqa yo‘l tushunchalari aniq matematik asosda ifodalanishi mumkinligi o‘rganildi. Bu tushunchalar nafaqat nazariy geometriyada, balki amaliy sohalarda ham keng qo‘llanilishi bilan ajralib turadi. Masalan, navigatsiya tizimlari, geodeziya, kompyuter grafikasi hamda fizikaning umumiy nisbiylik nazariyasida Riman geometriyasi muhim matematik apparat sifatida xizmat qiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Narmonov A.Y Analitik geometriya.Toshkent 2006-yil.
2. Dodajonov N.D.,Jo‘rayeva M.SH Geometriya 1-qism. “O‘qituvchi” nashriyoti, 1982- yil
3. Baxvalov S.V., Modenov P.S.,Parxomenko A.S. Analitik geometriyadan masalalar to‘plami. Toshkent, 2005 .
4. SHaripov. A.S Ikkinchi tartibli chiziqlarning tadbiqlari 2023-yil.
5. B.A.Xudayarov. Matematika 1-qism.Chiziqli algebra va analitik geometriya.Toshkent 2018-yil.
6. B.A.Xudayarov. “Matematikadan misol va masalalar to‘plami”. Toshkent 2018-yil.

Foydalanilgan internet saytlari ro‘yxati

1. Mathway (https://www.mathway.com/)
2. Math Stack Exchange (https://math.stackexchange.com/)
3. Wolfram MathWorld (https://mathworld.wolfram.com/)