INNOVATIVE PUBLICATION
Journal of Effective Learning and Sustainable Innovation
Vol.4 №5 (2026). MAY
innovativepublication.uz

GEODEZIK CHIZIQLAR NAZARIYASI

Saliyeva Sevara Mamirbek qizi
Andijon davlat pedagogika instituti
Matematika va informatika kafedrasi o'qituvchisi
E-mail:saliyevasevara18@gmail.com
Andijon davlat pedagogika instituti
Aniq va Tabiiy fanlar fakulteti
Matematika yo'nalishi 201-guruh talabasi
Akramova Mahbubaxon Burxonjon qizi
E-mail:mahbubaxonakramova06@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada geodezik chiziqlar nazariyasining asosiy tushunchalari, ularning matematik mohiyati va egri sirtlardagi eng qisqa yo'llarni aniqlashdagi o'rni yoritilgan. Geodezik chiziqlarning differensial tenglamalar yordamida ifodalanishi, turli sirtlarda qanday ko'rinish olishi hamda amaliy qo'llanilish sohalari tahlil qilingan. Shuningdek, mazkur nazariyaning geometriya, fizika va muhandislikdagi ahamiyati haqida ma'lumot berilgan.

Kalit so'zlar: Geodezik chiziq, egri sirt, eng qisqa yo'l, differensial tenglama, variatsion hisob, metrika, sfera, geometriya, navigatsiya, umumiy nisbiylik.

Аннотация: В данной статье рассматриваются основные понятия теории геодезических линий, их математическая сущность и роль в определении кратчайших путей на кривых поверхностях. Приводится описание геодезических линий с помощью дифференциальных уравнений, а также анализируются их формы на различных поверхностях. Особое внимание уделяется практическому применению данной теории в геометрии, физике и инженерии.

Ключевые слова: Геодезическая линия, кривая поверхность, кратчайший путь, дифференциальные уравнения, вариационное исчисление, метрика, сфера, геометрия, навигация.

Annotation: This article discusses the fundamental concepts of the theory of geodesic lines, their mathematical nature, and their role in determining the shortest paths on curved surfaces. The representation of geodesics using differential equations is described, and their forms on various surfaces are analyzed. Special attention is given to the practical applications of this theory in geometry, physics, and engineering.

Key Words: Geodesic line, curved surface, shortest path, differential equation, variational calculus, metric, sphere, geometry, navigation, general relativity.

Regulyar O sirt unda yotuvchi ikki marta differensiallanuvchi parametrlangan egri chiziq tenglama bilan berilgan bolsin.

Tarif. Parametrning har bir t qiymatida vektor sirtning nuqtasidagi urinma tekislikka perpendikulyar bolsa chiziq geodezik chiziq deb ataladi. Bu yerda chiziqning radius vektori bolgan nuqtasidir.

Geodezik chiziqlar — bu egri sirtlarda ikki nuqta orasidagi eng qisqa (yoki ekstremal) masofani tutashtiruvchi chiziqlardir. Oddiy evklid fazosida (tekislikda) ikki nuqta orasidagi eng qisqa yo‘l to‘g‘ri chiziq bo‘lsa, murakkab egri sirtlarda (masalan, sfera, ellipsoid yoki tor) bu vazifani geodezik chiziqlar bajaradi. Matematik nuqtai nazardan, sirtda yotuvchi chiziqning har bir nuqtasidagi bosh normali sirtning o‘sha nuqtadagi normali bilan ustma-ust tushsa, bunday chiziq geodezik chiziq deyiladi. Bu shuni anglatadiki, geodezik chiziq bo‘ylab harakatlanayotgan jism sirtning "ichida" hech qanday chetga burilmay, maksimal darajada "to‘g‘ri" harakat qiladi. Geodezik chiziqlarning asosiy ahamiyati haqida aytsak. Yer shari deyarli sfera yoki aniqrog‘igacha ellipsoid shakliga ega bo‘lgani uchun, xaritadagi to‘g‘ri chiziq har doim ham eng qisqa yo‘lni anglatmaydi. Samolyotlar va kemalar yoqilg‘i va vaqtni tejash maqsadida aynan geodezik chiziqlar (ortodromiyalar) bo‘ylab harakatlanadi. Masalan, Toshkentdan Nyu-Yorkka uchayotgan samolyot xaritada egri ko‘ringani bilan, aslida Yer sirti bo‘ylab eng qisqa geodezik yo‘lni bosib o‘tadi. Geodezik chiziqlar variatsion hisobning klassik masalasi bo‘lib, energiya sarfini minimallashtirish bilan bog‘liq. Mashinasozlikda, masalan, murakkab shakldagi detallarga ip o‘rash yoki kompozit materiallarni qoplashda materialning sirpanib ketmasligi va tarang turishi uchun u aynan geodezik chiziq bo‘ylab yotqizilishi kerak.

Geodezik chiziqlarning asosiy teoremalari

Teorema. Geodezik chiziq $\vec{p} = \vec{p}(t)$ tenglama bilan berilgan bo`ls, uning tezlik vektori $\vec{p}`(t)$ o`zgarmas uzunlikka ega bo`ladi.

Isbot. skalyar ko`paytma $(\vec{p}`, \vec{p}`)$ uzunlik kvadrati bo`lganligi uchun uni differensiallab uning hosilasi nolga teng ekanligini ko`rsatamiz. Haqiqattan, $(\vec{p}`, \vec{p}`)` = 2(\vec{p}``, \vec{p}`) = 0$ Demak $|\vec{p}`(t)| = \sqrt{(\vec{p}`, \vec{p}`)}$ o`zgarmasdir.

Teorema. Geodezik chiziq $\vec{p} = \vec{p}(t)$ tenglama bilan berilgan bo`lib, $s = s(t)$ differensiallanuvchi funksiya yordamida parametrni almashtirganimizda $\vec{p}_1 = \vec{p}_1(s)$ parametrlangan chiziq hosil bo`lsin. Parametr almashtirilgandan keyin chiziq geodezik bo`lishi uchun $s = \alpha t + \beta$ bo`lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Berilgan $s = s(t)$ formula parametrni almashtirish formulasi bo`lganligi uchun $s`(t) > 0$ yoki $s`(t) < 0$ munosabat o`rinli bo`ladi. Agar $\vec{p}_1 = \vec{p}_1(s)$ tenglama geodezik chiziqni aniqlasa,

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_1(s(t)), \vec{p}`(t) = \vec{p}`_1 s`(t), \vec{p}``(t) = \vec{p}``_1(s`(t))^2 + p`_1 s``(t)$$

va

$$0 = (\vec{p}`, \vec{p}``) = (s`)^3(\vec{p}`_1, \vec{p}``_1) + s`s``(\vec{p}`_1, \vec{p}`_1) = s`s``(\vec{p}`_1, \vec{p}`_1)$$

Tengliklarni hosil qilamiz. $s`(t) \neq 0$ bo`lgani uchun $s`` = 0$ hosil bo`ladi. Demak, $s(t) = \alpha t + \beta$ bo`ladi. Endi $s(t) = \alpha t + \beta$ deb faraz qilsak, $\vec{p}``(t) = \vec{p}``_1 s`^2$ tenglik $\vec{p}``(t)$ va $\vec{p}``_1$ vektorlarning kollinear ekanligini ko`rsatadi.

Geodezik egrilik

Geodezik chiziqlarni xarakterlovchi kattalik, geodezik egrilik tushunchasini kiritamiz. Regulyar $\hat{O}$ sirtning p nuqtasidan o'tuvchi γ egri chiziq berilgan bo'lsin. Chiziqning p nuqta atrofidagi qismining p nuqtadan o'tuvchi urinma tekislikka proeksiyasini γ_0 bilan belgilaymiz. Tabiiyki, γ_0 ham silliq egri chiziq bo'ladi. Proeksiyalash natijasida hosil bo'lgan γ_0 egri chiziqning p nuqtadagi egriligini chiziqning geodezik egriligi deb ataymiz.

Bizning maqsadimiz, γ geodezik chiziq bo'lishi uchun uning geodezik egriligi nolga teng bo'lishi zarur va yetarli ekanligini ko'rsatishdir. Buning uchun γ_0 va γ chiziqlar egriliklari orasidagi bog'lanishlarni topamiz. Avvalo, γ chiziq nuqtalaridan (p nuqtadan o'tuvchi) urinma tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziqlar o'tkazib, silindrik sirt hosil qilib, uni F bilan belgilaymiz. Bu silindrik sirtni α tekislik bilan kesganimizda γ_0 hosil bo'ladi ($\alpha - \Phi$ sirtning p nuqtadagi urinma tekisligi). Demak, F silindr uchun γ_0 normal kesim va uning bosh normali F ning normaliga kollineardir. γ va γ_0 chiziqlar umumiy urinmalarga ega. Shuning uchun, silindrik sirtga nisbatan Men'e teoremasidan foydalanib $k_0 = |k \cos \varphi|$ tenglikni hosil qilamiz. Bu yerda φ − γ_0 va γ chiziqlar bosh normallari orasidagi burchakdir, k_0 . k-mos ravishda γ_0 va γ chiziqlarning p nuqtadagi egriliklaridir. Endi γ chiziqni yoy uzunligi yordamida parametrlab, uning tenglamasini $\vec{p} = \vec{p}(s)$ ko`rinishda yozamiz va p nuqtaga mos kesuvchi parametrning qiymatini s_0 bilan belgilaymiz. Shunda $\vec{\tau} = \vec{p}(s)$-urinma vektor, $\vec{v}(s_0)$-bosh normal vektori bo'lsa, $\vec{\tau}$ -vektor γ_0 uchun ham p nuqtadagi urinma vektor bo'lib, $[\vec{\tau}, \vec{n}]$ vektor γ_0 chiziqning bosh normali bo'ylab yo'nalgan bo'ladi. Shuning uchun

$$|k_0| = |k \cos \varphi| = \left|\left(\ddot{\vec{p}}, [\dot{\vec{p}}\vec{n}]\right)\right| = |\ddot{\vec{p}}\dot{\vec{p}}\vec{n}|$$

formulani hosil qilamiz. Bu tenglikdan ko'rinib turibdiki, $k_0 = 0$ bo'lishi uchun bosh normal vektor sirtning normal vektori k_0 ga kollinear bo'lishi zarur va yetarlidir. Shunday qilib, biz quyidagi teoremani isbotladik.

Xulosa

Geodezik chiziqlar nazariyasi zamonaviy matematikaning eng fundamental yo‘nalishlaridan biri bo‘lib, u nafaqat nazariy geometriyada, balki amaliy fizika va muhandislikda ham hal qiluvchi ahamiyatga ega. Ushbu nazariyaning mohiyati sirt ustidagi ikki nuqtani tutashtiruvchi eng qisqa yoki ekstremal yo‘llarni aniqlashga asoslanadi. Differensial geometriya nuqtai nazaridan qaraganda, geodezik chiziqlar sirtning ichki geometrik xossalarini, xususan, uning egriligini tushunish uchun asosiy vosita bo‘lib xizmat qiladi. Sirtning har bir nuqtasidagi asosiy normal vektori sirtga o‘tkazilgan normal bilan mos tushishi geodezik chiziqlarning o‘ziga xos geometrik belgisidir. Nazariyaning amaliy ahamiyati, ayniqsa, navigatsiya va kartografiya sohalarida yaqqol namoyon bo‘ladi. Yer sharining shakli sferoid bo‘lganligi sababli, uzoq masofali aviatsiya va dengiz yo‘llari aynan geodezik chiziqlar (ortodromiyalar) bo‘ylab rejalashtiriladi, bu esa vaqt va yoqilg‘ini maksimal darajada tejash imkonini beradi. Fizika olamida esa Eynshteynning umumiy nisbiylik nazariyasi geodezik chiziqlarsiz tasavvur qilib bo‘lmas darajada murakkabdir. Ushbu nazariyaga ko‘ra, gravitatsiya kuchi aslida fazo-vaqt egriligining natijasi bo‘lib, koinotdagi barcha jismlar va hatto yorug‘lik nurlari ham ana shu egilgan fazodagi geodezik chiziqlar bo‘ylab harakatlanadi. Bundan tashqari, zamonaviy texnologiyalarda, masalan, kompozit materiallardan murakkab detallar ishlab chiqarishda yoki robotlarning harakat trayektoriyasini optimallashtirishda geodezik chiziqlar tenglamalaridan keng foydalaniladi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1.Narmanov, A. N. (2008). Differensial geometriya asoslari. – Toshkent: O‘qituvchi nashriyoti.

2. Abdullayev X., Qodirov M. Differensial geometriya asoslari. – Toshkent: Fan va texnologiya, 2016.

3.To‘rayev, R. (2015). Geometriya (II qism). – Toshkent: Fan va texnologiya.

4.Dubrovin B., Fomenko A., Novikov S. Modern Geometry – Methods and Applications. – Moscow: Nauka, 2001

5.Rasulov, A. (2010). Differensial geometriya masalalari to‘plami. – Toshkent: Tafakkur nashriyoti.

6.Azlarov T.A, Mansurov X. Matematik analiz. 1,2 qismlar, T., O’zbekiston, 1994, 1995.

7.Begmatov A., Musina N.G. Tenzor hisob elementlari. T., Universitet, 1993.

8.Sharipov R. Differensial geometriya va tenzor tahlili asoslari. – Toshkent: Universitet nashriyoti, 2016

9.Rashidov A., Jo‘rayev T. Geometriya va topologiya elementlari. – Toshkent: O‘qituvchi, 2018.

10.O‘rinboyev O. Differensial geometriya kursi. – Toshkent: Universitet nashriyoti, 2019.