INNOVATIVE PUBLICATION
Journal of Effective Learning and Sustainable Innovation
Vol.4 №5 (2026). MAY
innovativepublication.uz

MANIFOLD TUSHUNCHASI VA ULARNING XOSSALARI

Saliyeva Sevara Ma'mirbek qizi,
Andijon davlat pedagogika instituti "Matematika va Informatika" kafedrasi o'qituvchisi
E-mail: saliyevasevara18@gmail.com
Mamatqulova O'g'iloy Quyoshbek qizi
Andijon davlat pedagogika insituti 202-guruh talabasi
e-mail: hayothon838@gmail.com

ANNOTATSIYA. Ushbu maqolada manifol'd tushunchasi, uning differensial geometriya va topologiyadagi oʻrni, asosiy matematik tuzilmalari hamda xossalari keng va chuqur ilmiy yondashuv asosida tahlil qilinadi. Manifol'dlar murakkab fazoviy obyektlarni lokal ravishda Evklid fazosiga oʻxshash koʻrinishda ifodalash imkonini beruvchi fundamental matematik strukturalar hisoblanadi. Maqolada manifoldlarning koordinatalar tizimi, atlas, tangent fazo, metrik struktura, geodeziklar, kovariant hosila va egrilik kabi tushunchalari batafsil yoritiladi. Shuningdek, ularning robototexnika, kompyuter grafikasi, sun'iy intellekt, mashina oʻrganish va nazariy fizikadagi amaliy qoʻllanilishi ilmiy asosda tahlil qilinadi.

KALIT SOʻZLAR. Manifol'd, differensial geometriya, topologiya, tangent fazo, metrik tensor, geodezik, egrilik, atlas, koordinatalar, fazo-vaqt, topologik invariantlar, 3D modellashtirish

АННОТАЦИЯ. В данной статье рассматривается понятие многообразия (manifold), его роль в дифференциальной геометрии и топологии, а также основные математические структуры и свойства на основе широкого научного подхода. Многообразия представляют собой фундаментальные математические структуры, позволяющие локально описывать сложные пространственные объекты в виде, подобном евклидову пространству. В статье подробно рассматриваются такие понятия, как система координат многообразия, атлас, касательное пространство, метрическая структура, геодезические линии, ковариантная производная и кривизна. Также проводится научный анализ их практического применения в робототехнике, компьютерной графике, искусственном интеллекте, машинном обучении и теоретической физике.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Многообразие, дифференциальная геометрия, топология, касательное пространство, метрический тензор, геодезическая, кривизна, атлас, координаты, пространство-время, топологические инварианты, 3D моделирование.

ABSTRACT. This article analyzes the concept of manifolds, their role in differential geometry and topology, as well as their main mathematical structures and properties based on a broad scientific approach. Manifolds are fundamental mathematical structures that allow complex spatial objects to be locally represented in a form similar to Euclidean space. The article provides a detailed explanation of coordinate systems, atlas, tangent space, metric structure, geodesics, covariant derivative, and curvature. In addition, their practical applications in robotics, computer graphics, artificial intelligence, machine learning, and theoretical physics are scientifically analyzed.

KEYWORDS. Manifold, differential geometry, topology, tangent space, metric tensor, geodesic, curvature, atlas, coordinates, space-time, topological invariants, 3D modeling.

KIRISH

Zamonaviy ilm-fan va texnologiyaning rivojlanishi murakkab fazoviy va dinamik tizimlarni matematik jihatdan aniq tasvirlash zaruratini yuzaga keltirdi. Aynan shu ehtiyoj natijasida differensial geometriya va topologiya fanlarida manifol’d tushunchasi shakllandi va rivojlandi. Manifol’dlar yordamida yuqori o‘lchamli, murakkab strukturalar lokal ravishda oddiy Evklid fazosiga o‘xshash ko‘rinishda ifodalanadi.

Manifol’dlar zamonaviy matematikaning markaziy obyekti bo‘lib, ular fizika, robototexnika, kompyuter grafikasi, sun’iy intellekt va ma’lumotlar tahlili kabi ko‘plab sohalarda fundamental ahamiyatga ega. Ular murakkab tizimlarni soddalashtirish, optimallashtirish va tahlil qilishda kuchli matematik vosita sifatida xizmat qiladi.

MANIFOL’D TUSHUNCHASINING MATEMATIK ASOSI. Manifol’d — bu har bir nuqtasi atrofida Evklid fazosiga ($\mathbb{R}^n$) gomomorf yoki diffeomorf bo‘lgan topologik fazodir. Bu shuni anglatadiki, manifol’d global jihatdan murakkab bo‘lishi mumkin, ammo lokal darajada oddiy geometrik tuzilishga ega bo‘ladi.
Agar fazo har bir nuqtasida n o‘lchamli Evklid fazosiga o‘xshasa, u n-o‘lchamli manifol’d deb ataladi. Masalan, sfera yuzasi 2-o‘lchamli manifol’d, oddiy chiziq esa 1-o‘lchamli manifol’d hisoblanadi.

Manifol’dning asosiy g‘oyasi shundan iboratki, murakkab geometrik obyektlar kichik lokal bo‘laklarga ajratilib, har bir bo‘lak oddiy koordinatalar tizimi orqali ifodalanadi.

KOORDINATALAR TIZIMI VA ATLAS TUZILMASI. Manifol’dni o‘rganish uchun u lokal qismlarga bo‘linadi. Har bir lokal qism koordinata xaritasi (chart) deb ataladi. Bu xarita yordamida manifol’dning kichik qismi Evklid fazosiga moslashtiriladi.

Barcha chartlarning yig‘indisi atlasni hosil qiladi. Atlas manifol’dning global tuzilishini tushunishda muhim rol o‘ynaydi.

Atlas orqali:murakkab fazolar soddalashtiriladi ,differensial hisoblashlar amalga oshiriladi ,geometrik obyektlar analiz qilinadi ,lokal va global xossalar bog‘lanadi

Tangent fazo va uning chuqur mazmuni.Manifol’dning har bir nuqtasida tangent fazo mavjud bo‘lib, u shu nuqtadagi barcha mumkin bo‘lgan yo‘nalishlarni ifodalaydi. Tangent fazo vektor fazo bo‘lib, u orqali harakat, tezlik va o‘zgarishlar tavsiflanadi.Tangent fazo matematik jihatdan quyidagicha ifodalanadi: TpM — p nuqtadagi barcha tangens vektorlar to‘plami.

Agar manifol’d n-o‘lchamli bo‘lsa, uning tangent fazosi ham n-o‘lchamli bo‘ladi. Bu tushuncha differensial operatorlar va fizik modellarni qurishda asosiy rol o‘ynaydi.Metrik tensor va riemann tuzilmasi.Manifol’dda masofa tushunchasi metrik tensor orqali aniqlanadi. Metrik tensor fazodagi uzunlik, burchak va energiya kabi fizik-geometrik kattaliklarni hisoblash imkonini beradi.

Metrik struktura yordamida:ikki nuqta orasidagi masofa ,egri chiziq uzunligi ,sirt maydoni aniqlanadi.

Bu tuzilma Riemann geometriyasining asosini tashkil etadi va fazoning ichki geometriyasini o‘rganishga imkon beradi.

GEODEZIK CHIZIQLAR VA OPTIMALLASHTIRISH. Geodezik chiziq manifol’dda eng qisqa yoki eng tabiiy harakat yo‘lini ifodalaydi.Evklid fazoda geodezik to‘g‘ri chiziq bo‘lsa, sferada u katta aylana shaklida bo‘ladi. Geodeziklar:robototexnikada optimal harakat,navigatsiya tizimlari ,fizika va kosmologiya ,uchun asosiy vosita hisoblanadi.

Egrilik va geometrik struktura.

Egrilik fazoning tekis emasligini ifodalovchi fundam.ental kattalikdir. U Gauss egriligi,Riemann egrilik tensori va Ricci egriligi orqali ifodalanadi..Egrilik:sirtning deformatsiyasini ,fazoning egilishini ,gravitatsion maydonni

tavsiflashda muhim rol o‘ynaydi.Umumiy nisbiylik nazariyasida egrilik gravitatsiyaning asosiy manbai sifatida qaraladi.

Asosiy invariantlar:bog‘liqlik ,kompaktlik ,orientatsiya ,Euler xarakteristikasi ,genus .Bu xossalar fazoning umumiy tuzilishini aniqlashda muhimdir.Amaliy qo‘llanilish sohalari.Manifol’dlar zamonaviy ilm-fan va texnologiyaning ko‘plab sohalarida qo‘llaniladi.

Robototexnikada ular robot manipulyatorlarining konfiguratsion fazosini modellashtiradi. Geodeziklar esa optimal harakat yo‘lini aniqlaydi.

Kompyuter grafikasi va 3D modellashtirishda manifol’dlar sirtlarni realistik tasvirlash, deformatsiya va animatsiya jarayonlarini boshqarishda ishlatiladi.

Sun’iy intellekt va mashina o‘rganishda esa yuqori o‘lchamli ma’lumotlar manifol’dlar orqali tahlil qilinadi (manifold learning).

Nazariy fizikada esa fazo-vaqt 4 o‘lchovli manifol’d sifatida qaraladi va gravitatsiya uning egriligi orqali tushuntiriladi.

XULOSA

Manifol’d tushunchasi zamonaviy matematika va fizikaning eng fundamental g‘oyalaridan biridir. U murakkab fazoviy va dinamik tizimlarni soddalashtirilgan matematik model orqali ifodalash imkonini beradi. Manifol’dlar lokal jihatdan Evklid fazosiga o‘xshash bo‘lsa-da, global jihatdan murakkab tuzilishga ega.

Ular yordamida robot harakati optimallashtiriladi, 3D grafik modellar yaratiladi, fizik jarayonlar tushuntiriladi va ma’lumotlar tahlil qilinadi. Shu sababli manifol’dlar zamonaviy ilm-fan va texnologiyaning ajralmas matematik asoslaridan biri hisoblanadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. John M. Lee -Introduction to Smooth Manifolds. Springer, 2013.

2. James R. Munkres -Topology. Prentice Hall, 2000.

3. Barrett O’Neill -Elementary Differential Geometry. Academic Press, 2006.

4. Spivak M. -A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. Publish or Perish, 1999.

5. Do Carmo M.P. -Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice Hall, 1976.

6. Nakahara M. -Geometry, Topology and Physics. Taylor & Francis, 2003.

O‘zbek va rus tilidagi adabiyotlar: