



Differensial geometriya va topologiyaning umumlashtirilgan tatbiqlari

Saliyeva Sevara Ma'murbek qizi

Andijon davlat pedagogika instituti
"Matematika va Informatika" kafedrasida
o'qituvchisi

E-mail: saliyevasevara18@gmail.com

Soxibova Shaxnozaxon Sobirjon qizi

Andijon davlat pedagogika instituti 202-guruh talabasi

E-mail: andijonwester@gmail.com

Annotatsiya: Mazkur maqolada differensial geometriya va topologiya fanlarining asosiy tushunchalari, ularning rivojlanish tarixi hamda zamonaviy fan va texnikadagi qo'llanilish sohalari yoritilgan. Ishda egri chiziqlar, sirtlar, topologik fazolar, ochiq va yopiq to'plamlar, egrilik tushunchalari hamda sirtlarning geometrik xossalari tahlil qilingan. Shuningdek, differensial geometriya va topologiyaning matematika, fizika, muhandislik, kompyuter grafikasi va robototexnika sohalaridagi amaliy ahamiyati ko'rsatib berilgan.

Kalit so'zlar: Differensial geometriya, topologiya, egri chiziq, sirt, topologik fazo, egrilik, Frene formulalari, ochiq to'plam, yopiq to'plam, geometrik tasnif.

Аннотация : В данной статье рассматриваются основные понятия дифференциальной геометрии и топологии, история их развития, а также области применения в современной науке и технике. В работе проанализированы кривые, поверхности, топологические пространства, открытые и замкнутые множества, понятия кривизны и геометрические свойства поверхностей. Также показано практическое значение дифференциальной геометрии и топологии в математике, физике, инженерии, компьютерной графике и робототехнике.

Ключевые слова: Дифференциальная геометрия, топология, кривая, поверхность, топологическое пространство, кривизна, формулы Френе, открытое множество, замкнутое множество, геометрическая классификация.

Annotation : This article discusses the fundamental concepts of differential geometry and topology, their historical development, and their applications in modern science and technology. The paper analyzes curves, surfaces, topological spaces, open and closed sets, curvature concepts, and geometric properties of surfaces. In addition, the practical importance of differential geometry and topology in mathematics, physics,



engineering, computer graphics, and robotics is highlighted.

Keywords: *Differential geometry, topology, curve, surface, topological space, curvature, Frenet formulas, open set, closed set, geometric classification.*

Differensial geometriyada uch o'lchamli fazodagi chiziqlar va sirlar matematik analiz yordamida o'rganiladi. Ma'lumki, analitik geometriya kursida chiziqlar va sirlarni o'rganish ularning tenglamalarini tekshirish yordamida amalga oshiriladi. Shuning uchun algebraik metodlar analitik geometriya kursida asosiy rol o'ynaydi. Differensial geometriya kursida biz chiziq va sirlarni tenglamalar yordamida emas, balki fazodagi ma'lum xossalarga ega bo'lgan figuralar sifatida aniqlaymiz va ularni matematik analiz yordamida o'rganish uchun differensialanuvchi funksiyalar yordamida parametrlaymiz. Geometriyada matematik analiz metodlarini tadbiiq qilishga Peterburg fanlar akademiyasi a'zosi L.Eyler katta hissa qo'shdi. U chiziqni parametrlash, sirt nuqtasida bosh yo'nalishlar kabi muhim tushunchalarni kiritdi va juda ajoyib teoremlarni isbot qildi. Differensial geometriyaning asosiy masalalari sistematik ravishda yoritilgan birinchi asarni Gaspar Monj yozdi. Uning «Cheksiz kichiklar analizining geometriyaga tadbiiqi» nomli kitobi 1795 yili chop etildi.

Topologik fazo. Agar (X, τ) topologik fazo bo'lsa, X to'planning elementlari nuqtalar deb, τ oilaga tegishli X to'planning qism to'plamlari ochiq to'plamlar deb ataladi. Yuqoridagi keltirilgan 1) - 4) shartlarni topologik fazo aksiomalari deb ataymiz. Shunday qilib, biz hozir umumiy topologiyaning asosiy 13 tushunchasi - topologik fazo tushunchasini kiritdik. Endi bir nechta misollar keltiraylik.

1 - misol. Agar $X = R^n$ bo'lsa, τ bilan birinchi paragrafda kiritilgan R^n fazodagi ochiq to'plamlar oilasini belgilaymiz. Birinchi teorema ko'ra, τ topologiya bo'ladi. Bu topologiya evklid topologiyasi deb ataladi.

2 - misol. X - ixtiyoriy to'plam, τ oila bo'sh to'plam va X dan iborat bo'lsa, (X, τ) juftlik topologik fazo bo'ladi. Bu topologik fazoda faqat ikkita ochiq qism to'plam mavjud.

3 - misol. X - ixtiyoriy to'plam, τ oila X to'planning hamma qism to'plamlaridan iborat oila bo'lsin. Bu topologik fazoda ixtiyoriy qism to'plam ochiq to'plamdir. Bizga (X, τ) - topologik fazoda $A \subset X$ qism to'plam berilgan bo'lib, uning to'ldiruvchisi $X \setminus A$ ochiq to'plam bo'lsa, A to'plam yopiq to'plam deb ataladi.

Egriligi o'zgarmas sirtlar. To'liq egriligi o'zgarmas sirtlar sinfini tekshirishga o'tamiz. Avvalo aylana sirt haqida tushuncha hosil qilaylik. Asosiy egri chiziqni shu chiziq tekisligidan biror o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt **aylana sirt**



deyiladi. π tekislikda yotgan γ chiziqni Oz o'q atrofida aylantiraylik. γ chiziq XOZ tekislikda $z = f(\mu)$ ($\mu \geq 0$) tenglama bilan berilgan bo'lsin va $\angle XOP = \varphi$. γ chiziqda M nuqtani olamiz, φ burchak $[0, 2\pi]$ oraliqda o'zgarganda M nuqta markazi O' nuqtada bo'lgan γ_μ chizadi. U holda $F = \cup \gamma_\mu M$ nuqtaning Dekart koordinatalari x, y, z bo'lsa, u holda aylanma F sirtning parametrik tenglamalari:

$$x = \mu \cos \varphi, \quad y = \mu \sin \varphi, \quad z = f(\mu).$$

Agar $OM = r$ M nuqtaning radius vektori bo'lsa, sirtning vektor tenglamasi:

$$r = r(\mu, \varphi) = i \cos \varphi + j \mu \sin \varphi + k f(\mu), \text{ ko'rinishda bo'ladi}$$

$$\text{Bundan } r\mu = i \cos \varphi + j \sin \varphi + k f'(\mu), \quad r\alpha = -i \mu \sin \varphi + j \mu \cos \varphi,$$

$$\text{Demak, } x\mu = \cos \varphi, \quad y\mu = \sin \varphi, \quad z\mu = f'(\mu), \quad x\alpha = -\mu \sin \varphi, \quad y\alpha = \mu \cos \varphi, \quad z\alpha = 0.$$

$$\text{U holda } E = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi + f'^2(\mu) = 1 + f'^2(\mu), \quad F = 0, \quad G = \mu^2, \quad EG - F^2 = \mu^2(1 + f'^2(\mu)),$$

$$x\mu\mu = 0, \quad y\mu\mu = 0, \quad z\mu\mu = f''(\mu), \quad x\mu\alpha = -\sin \varphi, \quad y\alpha\mu = \cos \varphi, \quad z\mu\alpha = 0, \quad x\alpha\alpha = -\cos \varphi, \quad y\alpha\alpha = -\mu \sin \varphi, \quad z\alpha\alpha = 0.$$

$$\text{Bundan } L = \frac{f''(\mu)}{\sqrt{1 + f'^2(\mu)}}, \quad M = 0, \quad N = \frac{f''(\mu)}{\sqrt{1 + f'^2(\mu)}}$$

Sirtning M nuqtadagi tutillik egriligi:

$$K = \frac{(LN - M^2)}{(EG - F^2)} = \frac{\frac{f''(\mu)}{\sqrt{1 + f'^2(\mu)}} \times \frac{f''(\mu)}{\sqrt{1 + f'^2(\mu)}}}{1 + f'^2(\mu)} = \frac{f''(\mu) \times f''(\mu)}{1 + f'^2(\mu)}$$

Misol. Sferaning to'liq egriligini hisoblaymiz.

Sferaning parametrik tenglamasi: $x = a \cos \varphi \cos \mu, y = a \cos \mu \sin \varphi, z = a \sin \mu$.

Bulardan

$$x\mu = -a \sin \mu \cos \varphi, \quad y\mu = -a \sin \mu \sin \varphi, \quad z\alpha = a \cos \mu, \quad x\alpha = -a \cos \mu \sin \varphi,$$

$$y\alpha = a \cos \mu \cos \varphi, \quad z\alpha = 0.$$

$$E = a^2, \quad F = 0, \quad G = a^2 \cos^2 \mu, \quad EG - F^2 = a^2 \cdot a^2 \cos^2 \mu = a^4 \cos^2 \mu.$$

U holda birinchi kvadratik forma:

$$I = a^2(d\mu^2 + \cos^2 \mu d\varphi^2). \quad x\mu\mu = -a \cos \mu \cos \varphi, \quad y = -a \cos \mu \sin \varphi,$$

$$z\mu\alpha = -a \sin \mu, \quad x\mu\alpha = a \sin \mu \sin \varphi, \quad y\mu\alpha = -a \sin \mu \cos \varphi,$$

$$z\mu\alpha = 0, \quad x\alpha\alpha = -a \cos \mu \cos \varphi, \quad y\alpha\alpha = -a \cos \mu \sin \varphi, \quad z\alpha\alpha = 0.$$

$$\text{Bundan } L = a, \quad M = 0, \quad N = a \cos^2 \mu.$$

$$\text{Ikkinchi kvadratik forma: } II = a(d\mu^2 + \cos^2 \mu d\varphi^2).$$

$$\text{O'rta egriligi: } Kn = \frac{a(d\mu^2 + \cos^2 \mu d\varphi^2)}{a^2(d\mu^2 + \cos^2 \mu d\varphi^2)}$$

$$\text{To'liq egriligi: } Kn = \frac{aacos^2\mu}{a^4cos^2\mu} = \frac{1}{a^2}$$



Demak, sferaning ixtiyoriy nuqtasidagi to'liq egriligi o'zgarib qoladi.

Differensial geometriya egri chiziqlar, sirtlar va ko'p o'lchamli fazolarning xossalari matematik analiz usullari yordamida tadqiq etuvchi muhim matematika bo'limi ekanligi ko'rsatib berildi. Topologiya fanining asosiy tushunchalari, xususan topologik fazolar, ochiq va yopiq to'plamlar, ularning xossalari hamda matematikaning boshqa bo'limlari bilan bog'liqligi ham o'rganildi. Topologiya geometrik obyektlarning uzluksiz o'zgarishlar jarayonida saqlanib qoladigan xususiyatlarini o'rganishi bilan boshqa matematik fanlardan ajralib turadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

- 1.Sultonov T., Axmedov A. – Differensial geometriya asoslari. Toshkent, O'qituvchi nashriyoti.
- 2.Abdullayev R., Xudoyberganov G. – Umumiy topologiya asoslari. Toshkent.
- 3.Fomenko A.T. – Differensial geometriya va topologiya. Moskva.
- 4.Spivak M. – A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. Publish or Perish.
- 5.Gauss K.F. – Disquisitiones generales circa superficies curvas.
- 6.Monj G. – Application de l'analyse à la géométrie.