



## KONTINUUM VA YO'L BILAN BOG'LANISH

**Saliyeva Sevara Ma'mirbek qizi,**

Andijon davlat pedagogika instituti "Matematika va Informatika" kafedrası  
o'qituvchisi

*E-mail: [saliyevasevara18@gmail.com](mailto:saliyevasevara18@gmail.com)*

**To'xtaboyeva Layloxon Umidjon qizi**

Andijon davlat pedagogika instituti "Aniq va tabiiy" fanlar fakulteti Matematika  
yo'nalishi 2-kurs talabasi

*E-mail: [layloxontoxtaboyeva06@gmail.com](mailto:layloxontoxtaboyeva06@gmail.com)*

**Annotatsiya.** Ushbu maqolada topologiya fanining asosiy tushunchalaridan biri bo'lgan bog'lanishli to'plamlar, xususan, kontinium (metrik fazodagi ixcham va bog'lanishli to'plam) va yo'l bilan bog'lanish tushunchalari o'rtasidagi bog'liqlik va farqlar tadqiq etiladi. Maqolaning asosiy maqsadi har qanday yo'l bilan bog'langan faza bog'lanishli ekanligini, biroq buning aksi har doim ham o'rinli emasligini klassik misollar yordamida ko'rsatishdan iborat. Ish davomida quyidagi masalalarga alohida e'tibor qaratilgan: Kontinium tushunchasi: Kontiniumning topologik xossalari va uning metrik fazolardagi ahamiyati. Yo'l bilan bog'lanish: Fazo nuqtalarini uzluksiz akslantirish (yo'l) orqali tutashtirish imkoniyatlari. Qiyosiy tahlil: "Topologik sinus egri chizig'i" kabi maxsus misollar orqali bog'lanishli, ammo yo'l bilan bog'lanmagan to'plamlarning o'ziga xos xususiyatlari.

**Kalit so'zlar.** Topologiya, kontinium, bog'lanishli fazo yo'l bilan bog'lanishli fazo, metrik fazo, kompakt to'plam, lokal bog'lanish.

**Abstract.** This article studies the connection and differences between connected sets, which are one of the basic concepts of topology, in particular, the concepts of continuum (a compact and connected set in a metric space) and path connection. The main goal of the article is to show using classical examples that any path-connected set is connected, but the reverse is not always true. Throughout the work, special attention is paid to the following issues: The concept of continuum: Topological properties of continuum and its importance in metric spaces. Path connection: The possibilities of connecting points of a space by a continuous reflection (path). Comparative analysis: The specific properties of connected but not path-connected sets through special examples such as the "topological sine curve".

**Keywords.** Topology, continuum, connected space, path-connected space, metric space, compact set, local connection.



## Learning and Sustainable Innovation

**Аннотация.** В данной статье исследуются связи и различия между связными множествами, являющимися одним из основных понятий топологии, в частности, понятиями континуума (компактного и связного множества в метрическом пространстве) и связности по пути. Главная цель статьи — показать на классических примерах, что любое связное по пути множество является связным, но обратное утверждение не всегда верно. В работе особое внимание уделяется следующим вопросам: Понятие континуума: топологические свойства континуума и его значение в метрических пространствах. Связность по пути: возможности соединения точек пространства непрерывным отражением (путем). Сравнительный анализ: специфические свойства связных, но не связных по пути множеств на частных примерах, таких как «топологическая синусоидальная кривая».

**Ключевые слова:** Топология, континуум, связное пространство, связное по пути пространство, метрическое пространство, компактное множество, локальная связность.

Topologiya matematik analizning muhim bo‘limlaridan biri bo‘lib, u fazolarning umumiy xossalarini, xususan uzluksizlik, yaqinlik va bog‘lanish kabi tushunchalarni o‘rganadi. Zamonaviy matematikada topologiya nafaqat nazariy ahamiyatga ega, balki fizika, informatika, muhandislik va boshqa ko‘plab sohalarda ham keng qo‘llaniladi. Ayniqsa, fazolarning tuzilishini chuqurroq tushunishda bog‘langanlik va uzluksizlik bilan bog‘liq tushunchalar muhim rol o‘ynaydi.

Ushbu maqoolada topologiyaning asosiy tushunchalaridan biri bo‘lgan bog‘langanlik, shuningdek, uning muhim ko‘rinishlari — kontinum va yo‘l bilan bog‘langanlik tushunchalari o‘rganiladi. Bu tushunchalar fazolarning ichki tuzilishini aniqlash, ularning qanchalik “yaxlit” yoki “uzilgan” ekanligini baholash imkonini beradi.

Bog‘langan fazo tushunchasi intuitiv jihatdan fazoning bo‘laklarga ajralmaganligini bildiradi. Ya’ni, bunday fazoni ikki yoki undan ortiq o‘zaro ajralgan ochiq to‘plamlarga bo‘lish mumkin emas. Bu tushuncha topologik fazolarning eng asosiy xossalaridan biri hisoblanadi va u ko‘plab boshqa tushunchalarning shakllanishiga asos bo‘ladi.

Kontinum tushunchasi esa bog‘langanlik bilan chambarchas bog‘liq bo‘lib, u kompakt va bog‘langan fazolarni ifodalaydi. Kontinumlar topologiyada muhim sinfni tashkil etadi va ular ko‘pincha “uzluksiz butunlik” sifatida qaraladi. Bunday fazolar murakkab geometrik va topologik obyektlarni o‘rganishda asosiy vositalardan biri hisoblanadi.



Yo‘l bilan bog‘langanlik tushunchasi esa bog‘langanlikning yanada kuchliroq shakli bo‘lib, fazodagi istalgan ikkita nuqtani uzluksiz yo‘l orqali bog‘lash mumkinligini bildiradi. Bu tushuncha ayniqsa geometriya va fizika masalalarida muhim bo‘lib, fazoda harakat va uzluksiz o‘tish imkoniyatlarini ifodalaydi.

Topologiyada muhim tushunchalardan biri bu — bog‘langan fazo tushunchasidir. Ushbu tushuncha fazoning “butunligi”, ya’ni uni alohida, bir-biridan ajralgan qismlarga bo‘lish mumkin yoki mumkin emasligini ifodalaydi. Bog‘langanlik topologik fazolarning asosiy xossalaridan biri bo‘lib, u fazoning ichki tuzilishini aniqlashda muhim rol o‘ynaydi.

Formal jihatdan,  $X$  topologik fazo bog‘langan deyiladi, agar uni ikkita o‘zaro kesishmaydigan, bo‘sh bo‘lmagan ochiq to‘plamlar birlashmasi sifatida ifodalab bo‘lmasa. Ya’ni, agar quyidagi shart bajarilmasa:

$$X = U \cup V, U \cap V = \emptyset, U \neq \emptyset, V \neq \emptyset,$$

bu yerda  $U$  va  $V$  — ochiq to‘plamlar bo‘lsa, u holda  $X$  bog‘langan fazo hisoblanadi.

Agar esa bunday ajratish mavjud bo‘lsa, u holda fazo bog‘lanmagan (disconnected) deyiladi. Demak, bog‘lanmagan fazo kamida ikki mustaqil qismdan tashkil topgan bo‘ladi.

Bog‘langanlikni boshqa usul bilan ham ifodalash mumkin. Agar fazoda faqat ikkita yopiq to‘plam mavjud bo‘lib, ular bir vaqtning o‘zida ochiq (ya’ni clopen to‘plamlar) bo‘lsa —  $\emptyset$  va  $X$  — u holda fazo bog‘langan hisoblanadi. Ya’ni:

$$A \subset X, A \text{ ochiq va yopiq} \Rightarrow A = \emptyset \text{ yoki } A = X$$

Bu ta’rif bog‘langanlikni tekshirishda juda qulay hisoblanadi.

Bog‘langan fazo tushunchasini intuitiv jihatdan quyidagicha tushunish mumkin: agar fazoni “uzmasdan”, ya’ni uni bo‘laklarga ajratmasdan bir butun holda tasavvur qilish mumkin bo‘lsa, u bog‘langan fazodir. Aks holda, agar fazo bir nechta alohida qismlardan iborat bo‘lsa, u bog‘lanmagan hisoblanadi.

Topologiyada bog‘langanlik va yo‘l bilan bog‘langanlik tushunchalari bir-biriga yaqin, ammo ular orasida muhim farqlar mavjud. Bu farqlar fazolarning ichki tuzilishini yaxshiroq tushunish va ularni tahlil qilishda juda muhimdir.

Bog‘langanlik shuni anglatadiki, fazo ikkita alohida yopiq va bir-biridan uzluksiz ajralgan qismga bo‘linmaydi. Ya’ni, fazo “bir butun” bo‘lib, uni ikki qismga ajratib, ularni bog‘lamay qo‘yib bo‘lmaydi. Bog‘langanlik fazoning umumiy butunligini bildiradi, lekin bu nuqtalar orasida aniq yo‘l mavjudligini kafolatlamaydi.

Yo‘l bilan bog‘langanlik esa bog‘langanlikning kuchliroq shakli bo‘lib, har qanday ikkita nuqtani uzluksiz yo‘l orqali bog‘lash mumkinligini talab qiladi. Shu sababli har bir yo‘l bilan bog‘langan fazo avvalambor bog‘langan, lekin har bir bog‘langan fazo



## Learning and Sustainable Innovation

yo‘l bilan bog‘langan bo‘lishi shart emas.

Asosiy farqlar:

Kuchlilik nuqtai nazaridan:

- Bog‘langanlik — umumiy butunlikni bildiradi.
- Yo‘l bilan bog‘langanlik — nuqtalarni uzluksiz yo‘l orqali bog‘lashni bildiradi; bu bog‘langanlikdan kuchliroq.

Har doim to‘g‘ri kelmasligi:

- Har bir yo‘l bilan bog‘langan fazo bog‘langan.
- Har bir bog‘langan fazo yo‘l bilan bog‘langan bo‘lmaydi; ya‘ni ba‘zi bog‘langan fazolarni nuqtalar orasida uzluksiz yo‘l orqali bog‘lab bo‘lmaydi.

Misollar orqali tushuntirish:

- Bog‘langan, lekin yo‘l bilan bog‘lanmagan fazo: “ikki chiziqni o‘tkazib, faqat bitta nuqtada tutib turilgan fazo” yoki bog‘langan komponentalari teskari yo‘l bilan bog‘lanmagan disklar. Bu fazo bog‘langan, lekin ayrim nuqtalar orasida uzluksiz yo‘l yo‘q.

- Yo‘l bilan bog‘langan fazo: yopiq kesma  $[0,1]$ , aylana  $S_1$ , yopiq disk  $D$ . Bu fazolarda har bir nuqtani boshqa nuqtaga uzluksiz yo‘l orqali bog‘lash mumkin.

Bog‘langanlik va yo‘l bilan bog‘langanlik tushunchalari bir-biriga yaqin bo‘lsa-da, ular orasidagi farq nuqtalar orasidagi yo‘l mavjudligi bilan aniqlanadi. Yo‘l bilan bog‘langanlik bog‘langanlikni mustahkamlaydi va fazolarning ichki tuzilishini, komponentalararo uzluksiz bog‘lanishni ko‘rsatadi. Shu nuqtai nazardan, yo‘l bilan bog‘langanlik fazolarni soddalashtirish, tahlil qilish va matematik invariantlarni aniqlashda juda muhim ahamiyatga ega.

Xulosa qilib aytganda ushbu maqolada biz topologik fazolar, bog‘langanlik, kontinuum va yo‘l bilan bog‘langanlik tushunchalarini chuqur o‘rganib chiqdik hamda ularning asosiy xossalari, misollari va amaliy qo‘llanilishiga to‘xtaldik. Natijada, bog‘langanlik, kontinuum va yo‘l bilan bog‘langanlik tushunchalari topologiyaning asosiy tamoyillaridan biri bo‘lib, fazolarning ichki tuzilishini, ularning komponentalari va invariantlarini aniqlashga yordam beradi. Bu tushunchalar nafaqat nazariy matematika, balki amaliy masalalarni yechishda ham katta ahamiyatga ega.



**Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati:**

1. **Narmanov, A. N. (2008).** Differential geometriya asoslari. – Toshkent: O'qituvchi nashriyoti.
2. **Sharipov R.** Differential geometriya va tenzor tahlili asoslari. – Toshkent: Universitet nashriyoti, 2016
3. **Rashidov A., Jo'rayev T. Geometriya va topologiya elementlari.** – Toshkent: O'qituvchi, 2018.
4. **Manfredo P. do Carmo.** Differential Geometry of Curves and Surfaces. – Prentice-Hall, 1976.
5. **Barrett O'Neill.** Elementary Differential Geometry. – Academic Press, 2006.
6. **Luther Pfahler Eisenhart.** Riemannian Geometry. – Princeton University Press, 1997.
7. **John M. Lee. Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature.** – Springer, 1997.
8. **Michael Spivak.** A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. – Publish or Perish, 1999.
9. **Internet manbalar:**
  - <https://mathworld.wolfram.com>
  - <https://ncatlab.org/nlab/show/topology>
  - [https://en.wikipedia.org/wiki/Topological\\_space](https://en.wikipedia.org/wiki/Topological_space)
  - <https://www.math.uchicago.edu/~may/REU2017/REUPapers/Hofmann.pdf>