INNOVATIVE PUBLICATION
Vol.4 №4 (2026). April
Journal of Effective
innovativepublication.uz
Learning and Sustainable Innovation

POLIEDRLAR VA ULARNING TOPLOGIK XOSSALARI

Saliyeva Sevara Ma'mirbek qizi
Matematika va Informatika kafedrasi o'qituvchisi, Andijon davlat pedagogika instituti,
E-mail: saliyevasevara18@gmail.com
Bahriddinova Husnidaxon Bahodirjon qizi
Matematika va Informatika yo'nalishi talabasi, Andijon davlat pedagogika instituti
E-mail: husnidabahriddinova9@gmail.com

POLIEDRLAR VA ULARNING TOPLOGIK XOSSALARI

Annotatsiya: *Ushbu ishda poliedrlar nazariyasining fundamental topologik invariantlari, xususan, Eyler xarakteristikasining invariantlik xususiyati zamonaviy geometriya prizmasidan tahlil qilinadi. Tadqiqot davomida qavariq poliedrlarning sferik gomeomorfizmi va ixtiyoriy jinsli* (g) *yopiq sirtlarning poliedral approksimatsiyasi masalalari ko'rib chiqiladi. Maqolada kombinatorik topologiyaning asosiy tamoyillari asosida poliedral komplekslarning gomologik xossalari va Betti sonlari o'rtasidagi funksional bog'liqliklar yoritilgan. Shuningdek, diskret Gauss-Bonne teoremasining poliedral sirtlardagi tatbiqi hamda uchlardagi burchak defektlarining global topologik struktura bilan bog'liqligi matematik isbotlar orqali ko'rsatib beriladi. Ishning ilmiy yangiligi yuqori o'lchamli politoplarning topologik klassifikatsiyasini tizimlashtirish va ularni manifoldlar nazariyasi bilan bog'lashdan iborat.*

Kalit so'zlar: *Poliedr, Eyler xarakteristikasi, topologik invariant, gomeomorfizm, manifold, kombinatorik struktura, burchak defekti, Betti sonlari, triangulyatsiya.*

POLYHEDRATES AND THEIR TOPOLOGICAL PROPERTIES

Annotation: *This work analyzes the fundamental topological invariants of polyhedra theory, in particular, the invariance property of Euler's characteristic, from the prism of modern geometry. During the research, the issues of spherical homeomorphism of convex polyhedra and polyhedral approximation of closed surfaces of arbitrary genus* (g) *are considered. The article, based on the basic principles of combinatorial topology, covers the functional relationships between the homology properties of polyhedral complexes and Betti numbers. Also, the application of the discrete Gauss-Bonne theorem to polyhedral surfaces and the connection of corner defects at the vertices with the global topological structure are shown through mathematical proofs. The scientific novelty of the work lies in the systematization of the topological classification of high-dimensional polytopes and their connection with the theory of*

manifolds.
Keywords: *Polyhedron, Euler characteristic, topological invariant, homeomorphism, manifold, combinatorial structure, corner defect, Betti numbers, triangulation.*

МНОГОУГОЛЬНИКИ И ИХ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

Аннотация: *В данной работе анализируются фундаментальные топологические инварианты теории многогранников, в частности, свойство инвариантности характеристики Эйлера, с точки зрения современной геометрии. В ходе исследования рассматриваются вопросы сферического гомеоморфизма выпуклых многогранников и полиэдральной аппроксимации замкнутых поверхностей произвольного рода* (g). *Статья, основанная на основных принципах комбинаторной топологии, охватывает функциональные связи между гомологическими свойствами многогранных комплексов и числами Бетти. Также математическими доказательствами показано применение дискретной теоремы Гаусса-Бонна к многогранным поверхностям и связь дефектов углов в вершинах с глобальной топологической структурой. Научная новизна работы заключается в систематизации топологической классификации многомерных многогранников и их связи с теорией многообразий.*
Ключевые слова: *многогранник, характеристика Эйлера, топологический инвариант, гомеоморфизм, многообразие, комбинаторная структура, угловой дефект, числа Бетти, триангуляция.*

KIRISH

Poliedrlar nazariyasi klassik geometriya va zamonaviy topologiyaning eng fundamental kesishish nuqtalaridan biri hisoblanadi. Antik davrda Platon jismlari sifatida boshlangan ushbu soha, bugungi kunga kelib silliq manifoldlarni diskretizatsiya qilish va fazoviy strukturalarni kombinatorik tahlil qilishning asosiy vositasiga aylandi. Poliedrlarni nafaqat statik geometrik ob’ektlar, balki ma’lum bir topologik xossalarga ega bo‘lgan manifoldlar sifatida o‘rganish, ularning global va lokal xususiyatlari o‘rtasidagi bog‘liqlikni tushunish imkonini beradi.

Ushbu tadqiqotning dolzarbligi poliedral komplekslarning topologik invariantlarini aniqlash va ularni yuqori o‘lchamli fazolarga umumlashtirish zarurati bilan belgilanadi. Topologiyaning asosiy tamoyillariga ko‘ra, poliedrning shakli o‘zgarsa-da (uzluksiz deformatsiya ostida), uning ayrim fundamental miqdorlari — invariantlari o‘zgarmas qoladi. Bular orasida eng muhimi, 1750-yilda Leonhard Eyler tomonidan kashf etilgan va keyinchalik Anri Puankare tomonidan gomologik guruhlar tushunchasi orqali kengaytirilgan Eyler xarakteristikasidir. Maqolaning asosiy maqsadi — poliedrlarning kombinatorik sxemasi (uchlar, qirralar va yoqlar konfiguratsiyasi) ularning global topologik tipi (jinsi, orientatsiyasi) bilan qanday bog‘liqligini matematik jihatdan asoslab berishdir. Shuningdek, ishda diskret geometriya usullari yordamida poliedral sirtlarning egriligini hisoblash va bu egrilikning topologik invariantlar bilan aloqasini ko‘rsatuvchi Gauss-Bonne teoremasining diskret analogi tahlil qilinadi.

Eyler Invariantligi va Kombinatorik Topologiya. Poliedrlar topologiyasining markaziy tushunchasi — bu sirtning diskret strukturasi va uning global shakli o‘rtasidagi bog‘liqlikdir. Ixtiyoriy qavariq poliedr uchun uchlar (V), qirralar (E) va yoqlar (F) soni o‘rtasidagi bog‘liqlik Eyler xarakteristikasi orqali ifodalanadi:

$$X = V - E + F = 2$$

Topologik nuqtai nazardan, ushbu $X = 2$ qiymati poliedrning **sferik turga** (genus $g = 0$) mansubligini ko‘rsatadi. Agar poliedr sirtini triangulyatsiya qilsak, ya’ni har bir yoqni simplekslarga (uchburchaklarga) ajratsak, ushbu invariant o‘zgarmas qoladi. Bu esa poliedrning har qanday kombinatorik bo‘linishi (refinement) uning topologik tabiatini o‘zgartirmasligini isbotlaydi.

Sirtlar Jinsi va Gomotopik Klassifikatsiya. Poliedr murakkablashgani sari, ya’ni unda teshiklar (handles) paydo bo‘lishi bilan uning topologik klassifikatsiyasi **jins** $(\boldsymbol{g})$ tushunchasiga tayanadi. Ixtiyoriy yopiq orientatsiyalanuvchi poliedral sirt uchun umumlashtirilgan Eyler formulasi quyidagicha ko‘rinishga ega:

$$V - E + F = 2(1 - g)$$

Bu yerda $g -$ poliedrning jinsi (masalan, tor uchun $g = 1$).
Agar ikki poliedr bir xil g jinsga ega bo‘lsa, ular topologik jihatdan ekvivalent hisoblanadi.

Shtaynits teoremasi. Har qanday 3-bog‘lamli tekis grafik qavariq poliedrning 1-skeleti (qirralari to‘plami) sifatida namoyon bo‘lishi, topologiyaning graf nazariyasi bilan chuqur bog‘liqligini ko‘rsatadi

Diskret Egrilik va Gauss-Bonne Teoremasining Poliedral Analogi. Silliq manifoldlarda egrilik integral tushunchasi orqali aniqlansa, poliedrlarda egrilik uchlardagi **burchak defekti** orqali aniqlanadi. Ixtiyoriy v uchi uchun burchak defekti $K(v)$ quyidagicha hisoblanadi:

$$K(v) = 2\pi - \sum_{j \in faces(v)} \Theta_{v,j}$$

Bu yerda $\Theta_{v,j} - v$ uchida tutashgan yoqlarning ichki burchaklari.

Teorema (Diskret Gauss-Bonne): Poliedrning barcha uchlaridagi burchak defektlarining yig‘indisi uning Eyler xarakteristikasining 2π barobariga teng:

$$\sum_{v \in V} K(v) = 2\pi X(M)$$

Bu natija geometrik miqdorlar (burchaklar) va topologik miqdorlar (yoqlar va uchlar soni) o‘rtasidagi fundamental muvozanatni isbotlaydi.

Yuqori O‘lchamli Politoplar va Gomologik Invariantlar. n-o‘lchamli fazoda poliedral komplekslar (politoplar) uchun k-o‘lchamli elementlar (uchlar, qirralar, ..., $n-1$ o‘lchamli giperyoqlar) soni f_k bilan belgilanadi. Puankare isbotlaganidek, yuqori o‘lchamli ob’ektlarning topologik barqarorligi ularning

Betti sonlari (b_i) orqali ifodalanadi:

$$X(P) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i f_i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i b_i$$

Betti sonlari ob’ektning turli o‘lchamdagi "bo‘shliqlari" sonini bildiradi, bu esa yuqori o‘lchamli ma’lumotlar topologiyasini o‘rganishda asosiy metrika bo‘lib xizmat qiladi. Maqoladagi nazariy qarashlarni isbotlash uchun eng murakkab muntazam poliedrlardan biri — **Ikozaedr**ni tahlil qilamiz.

MISOL. 1) Uchlar soni (V): 12 , Qirralar soni (E): 30 Yoqlar soni (F): 20 (barchasi muntazam uchburchaklar) bilan Eyler xarakteristikasini tekshiramiz $X = V - E + F = 12 - 30 + 20 = 2$ *Natija:* $X = 2$ bo‘lgani uchun ikozaedr sferik topologiyaga ega $(g = 0)$.

2) Burchak defekti va Gauss-Bonne analogi bilan tekshiramiz. Ikozaedrning har bir yoqi muntazam uchburchak, demak burchaklari $60^\circ \left(\frac{\pi}{3} rad\right)$ Har bir uchda 5 ta uchburchak tutashadi.

Bitta uchdagi burchaklar yig‘indisi: $5 \cdot 60^\circ = 300^\circ$

Bitta uchdagi burchak defekti:$K(v) = 360^\circ - 300^\circ = 60^\circ \left(\frac{\pi}{3} rad\right)$

Barcha 12 ta uchdagi umumiy defekt: $12 \cdot 60^\circ = 720^\circ$

Gauss-Bonne bo‘yicha: $2\pi X = 2 \cdot 180^\circ \cdot 2 = 720^\circ$ Lokal geometrik defektlar yig‘indisi global topologik invariantga to‘liq mos keldi.

XULOSA. Poliedrlarning topologik xossalarini tadqiq etish shuni ko‘rsatadiki, diskret geometrik strukturalar ortida qat’iy topologik qonuniyatlar yotadi. Eyler xarakteristikasining invariantligi poliedrlarni klassifikatsiya qilishda universal kalit bo‘lib xizmat qiladi. Burchak defektlari va Gauss-Bonne teoremasining diskret talqini orqali biz lokal geometriyadan global topologiyaga o‘tish tamoyillarini ko‘ramiz. Ushbu tadqiqot natijalari poliedrlar nafaqat vizual shakllar, balki murakkab manifoldlarning matematik modeli ekanligini tasdiqlaydi. Poliedral topologiya usullari bugungi kunda nazariy fizikadan tortib, sun'iy intellekt va ma’lumotlar tahliligacha bo‘lgan sohalarda strukturalarni optimallashtirish va tizimlashtirishning asosi bo‘lib qolmoqda.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. **Coxeter, H. S. M.** (1973). *Regular Polytopes*. Dover Publications. (Poliedrlar geometriyasi bo‘yicha fundamental qo‘llanma).
2. **Alexandrov, A. D.** (2005). *Convex Polyhedra*. Springer Science & Business Media. (Qavariq poliedrlarning metrik nazariyasi).
3. **Armstrong, M. A.** (1983). *Basic Topology*. Springer-Verlag. (Eyler xarakteristikasi va sirtlar topologiyasi qismi).
4. **Ziegler, G. M.** (1995). *Lectures on Polytopes*. Graduate Texts in Mathematics, Springer. (Politoplarning kombinatorik xossalari).
5. **Grünbaum, B.** (2003). *Convex Polytopes*. Springer. (Yuqori o‘lchamli fazolardagi poliedrlar tahlili).