



FUNDAMENTAL GURUH TUSHUNCHASI

Saliyeva Sevara Mamirbek qizi

Andijon davlat pedagogika instituti

Matematika va Informatika kafedrası o'qituvchisi

Andijon davlat pedagogika instituti

Aniq va tabiiy fanlar fakultiteti matematika yo'nalishi

201-guruh talabasi

Umaraliyeva Ruxshona Umidjon qizi

ANNOTATSIYA: Ushbu maqolada algebraik topologiyaning muhim tushunchalaridan biri bo'lgan fundamental guruh nazariyasi keng yoritiladi. Fundamental guruhning ta'rifi, uning hosil bo'lishi, asosiy xossalari hamda turli topologik fazolarni o'rganishdagi ahamiyati tahlil qilinadi.

Kalit so'zlar: Fundamental guruh, algebraik topologiya, topologik fazo, yopiq yo'l, gomotopiya, invariantlar, fazolarni tasniflash, uzluksizlik, matematik tahlil.

Аннотация: В данной статье рассматривается одно из важнейших понятий алгебраической топологии — фундаментальная группа. Подробно анализируются определение, построение и основные свойства фундаментальной группы. Освещается её роль в изучении топологических пространств.

Ключевые слова: Фундаментальная группа, алгебраическая топология, топологическое пространство, замкнутый путь, гомотопия, инварианты, классификация пространств, непрерывность, математический анализ.

Annotation: This article discusses one of the fundamental concepts of algebraic topology – the fundamental group. The definition, construction, and main properties of the fundamental group are analyzed in detail. The role of the fundamental group in studying topological spaces is also highlighted.

Keywords: Fundamental group, algebraic topology, topological space, closed path, homotopy, invariants, classification of spaces, continuity, mathematical analysis.

Fundamental guruh

$S(I, X)$ fazoda aniqlangan yo'llarning ekvivalentlik sinflari (agar $\{0, 1\}$ ga nisbatan gomotop bo'lsa, yo'llar ekvivalent) aksiomalar gruppasining deyarli hammasini qanoatlantiradi. Bu to'plamda, ya'ni $C(I, X)$ da muammo shundaki, ko'paytirish doimo aniqlanmagan, chunki birlik element ma'lum ma'noda "suzadi". Bu qiyinchilikni bartaraf etish uchun yopiq yo'llar sinfini ko'rib chiqamiz.



Ta'rif. Agar f uchun $f(0) = f(1)$ o'rinli bo'lsa, $f \in S(I, X)$ yo'l yopiq deyiladi. Agar $f(0) = f(1) = x$ bo'lsa, F yo'l X fazoning x nuqtasidagi yopiq yo'l deyiladi.

Ma'lumki, bu to'plamda $*$ amali aniqlanadi, $[f], [g] \in \pi(X, x)$ bo'lsa, u holda $[f] * [g] \in \pi(X, x)$ bo'ladi. Birlik elementi esa, $[\varepsilon_x]$ dan iborat.

Teskari element $[f]^{-1} = [\bar{f}]$ tenglik bilan aniqlanadi. Amalning assotsiativligi kelib chiqadi. Buning uchun $[(g * h)oh]$ yozuvi o'rniga ko'p hollarda $[f * g * h]$ yozuvini ishlatamiz.

Teorema. $x, y \in X$. Agar X fazoda x va y larni bog'lovchi yo'l mavjud bo'lsa, $\pi(X, x)$ va $\pi(X, y)$ gruppalar izomorf bo'ladi.

Isbot. X fazoning x va y nuqtalari orasidagi yo'l f bo'lsin, ya'ni $f \in C(I, X)$ va $f(0) = x$ va $f(1) = y$. Agar $g \in C(I, X)$ x nuqtadagi yopiq yo'l bo'lsa, u holda $(f * g) * f$ y nuqtada yopiq yo'l bo'lsa. Shu sababli, $U_f: \pi(X, x) \rightarrow \pi(X, y)$ akslantirishni $u_f(g) = [\bar{f} * g * f]$ formulasi bilan aniqlaymiz. Bu akslantirish gruppalar gomomorfizmi bo'ladi, chunki $u_f([g][h]) = u_f[g * h] = [\bar{f} * g * h] = [\bar{f} * f * \bar{f} * h * f] = [\bar{f} * g * h][\bar{f} * h * f] = u_f[g]u_f[h]$ o'rinlidir. Teskari yo'l \bar{f} ni, ya'ni y va x lar orasidagi yo'lni qo'llab, $U_f: \pi(X, y) \rightarrow \pi(X, x)$ ni $u_f(h) = [f * h * \bar{f}]$ formulasi bilan aniqlaymiz. Tekshirish natijasida $u_f u_f[g] = [g]$ va $u_f u_f[h] = [h]$ larga ega bo'lamiz. Demak, u_f biekvativ akslantirish ekan. Shu sababli U_f izomorf bo'ladi.

Aylana va ba'zi sirtlarning fundamental gruppasi

Ixtiyoriy $f \in C(I, S^1)$ yopiq yo'lni olaylik, bunda $x_0 \in S^1$, $f(0) = 1$ dan iborat bo'lsin. Har bir bunday $f \in C(I, S^1)$ $f(0) = x_0 S^1$ yopiq yo'lni olsak, aylanani bir necha marta o'ralgan, deb tushunish mumkin. Bu o'ramlar sonini shu yopiq $f \in C(I, S^1)$ yo'lning darajasi deyishimiz mumkin, ya'ni $x_0 \in S^1$ nuqtadan har bir $f \in C(I, S^1)$ yopiq yo'lga birorta butun son n yoki n mos qo'yilgan desak bo'ladi. Agar aylanani o'ragan yopiq yo'l soat miliga teskari n marta o'ralgan bo'lsa, bu son n deb olinadi. Shuni ta'kidlash mumkinki, agar ularning darajalari teng bo'lsa, ikki yopiq yo'l faqat va faqat ekvivalentdir ($\{0,1\}$ ga nisbatan gomotop). Shunday qilib, har bir n son uchun darajasi n ga teng bo'lgan yopiq yo'l mavjuddir. Teorema. Har bir uzliksiz $f \in C(I, S)$ akslantirish uchun uning tiklamasi $\bar{f} \in C(I, R)$ mavjuddir.

Isbot. Oldingi teorema isbotidagi mulohazalarni davom ettiramiz. I^2 kvadrat kompakt bo'lganligi tufayli a_i va b_j sonlarni shunday tanlaymizki, ular quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:



Learning and Sustainable Innovation

$$0 = a_0 < a_i < \dots < a_n = 1, 0 = b_0 < b_j < \dots < b_m = 1$$

$F(R_{ij}) \subset S_{ij}$, bu yerda R_{ij} to'g'ri to'rtburchak $i = \overline{0, n} j = \overline{0, m}$. $R_{ij} = \{(t, s) \in I^2: a_i \leq t \leq a_{i+1}; b_j \leq s \leq b_{j+1}\} S_{ij}$ to'plam S^1 dagi ochiq to'plam, u uchune⁻¹(S_{ij}). Bu R dagi ochiq to'plamlarning dizyunkt birlashmasi bo'lib, ularning har biri e natijasida S_{ij} ga gomeomorf akslanadi. Bu yerda to'g'ri to'rtburchaklardagi $R_{00}, R_{0i}, \dots, R_{0m} R_{j0}, R_{ji}, \dots, \tilde{F}$ tiklanma induksiya bo'yicha oldingi teoremaga o'xshab aniqlanadi.

Teorema. $\pi(S^1, 1) \approx Z$.

Isbot. $\varphi: \pi(S^1, 1) \rightarrow Z$ akslantirishni olamiz va uni $\varphi([f]) = deg f$ ko'rinishida aniqlaymiz; bu yerda $deg f$ belgi f ning darajasini bildiradi. Ta'kidlaymizki, $deg f = \tilde{f}(1)$, bu yerda \tilde{f} akslantirish f ning yagona tiklanmasi bo'lib, $\tilde{f}(0) = 0$. Oldingi natijaga ko'ra, φ akslantirish korrekt aniqlangandir.

φ ning gruppalar orasidagi izomorfizm ekanligini ko'rsatamiz. Oldin φ ning gomomorfizmligini ko'rsataylik.

Aytaylik, $l_a(f)$ akslantirish f tiklanmaning boshlanishi $a \in e^{-1}(f(0))$ bo'lsin. Demak, $e_0(f) = \tilde{f} \circ e_a(f)(t) = \tilde{f}(t) + a$ birorta boshlanishi 1 da bo'lgan S^1 yo'ldir. Ma'lumki, $1_a(f * g) = 1_a(f) * 1_a(g)$, bu yerda $b = \tilde{f}(1) + a$. Demak, agar $[g], [f] \in (S^1, 1)$ bo'lsa, u holda $([f][g]) = \varphi([f] * [g]) = [\tilde{f} * g](1) = e_0(f * g) = (e_0(f)) * (e_b(g))(1) = 1_b(g)(1) = b + \tilde{g}(1) = f(1) + \tilde{g}(1) = \varphi([f]) + \varphi([g])$ bo'ladi. Bu yerda $b = f(1)$. Demak, φ -gomomorfizm.

Endi φ akslantirishning syurektiv ekanligini ko'rsatamiz. $n \in Z$ uchun, aytaylik, $g: I \rightarrow R$ akslantirish $g(t) = nt$ tenglik bilan aniqlansin. U holda $eg: I \rightarrow S^1$ akslantirish 1 nuqtada yopiq yo'l bo'ladi. Bu yerda g akslantirish $1g$ ning tiklanmasi bo'lgani tufayli uning uchun $g(0) = 0$. U holda $\varphi([eg]) = deg(eg) = g(1) = n$. Bu φ ning syurektivligidir. Endi φ ning in'ektivligini ko'rsatish uchun $\varphi = 0$ deb faraz qilaylik, ya'ni $deg f = 0$. f ning tiklanmasi \tilde{f} bo'lsa, $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(1) = 0$ shartlarni qanoatlantiradi. R ning tortiluvchan ekanligidan $\tilde{f} \approx \tilde{\varepsilon}_0(rel\{0,1\})$. Boshqacha aytganda, shunday $F: I^2 \rightarrow R$ akslantirish topiladiki, uning uchun $F(0, t) = \tilde{f}(t)$, $F(1, 0) = 0$ va $F(t, 0) = F(t, 1) = 0$, lekin $F(s, t) = (1 - s)\tilde{f}(t)$ bo'lsa. Ammo $eF: I^2 \rightarrow S^1$ akslantirish quyidagi $eF(0, t) = f(t)$, $eF(1, t) = 1$, $eF(t, 0) = eF(t, 1) = 1$ shartlarni qanoatlantiradi.

Xulosa

Xulosa qilib aytganda, fundamental guruh tushunchasi algebraik topologiyaning eng muhim va markaziy tushunchalaridan biri hisoblanadi. U topologik fazolarning



ichki tuzilishini o‘rganishda, ayniqsa, yopiq yo‘llar va ularning gomotopiya sinflari orqali fazolarning asosiy xossalarini aniqlashda katta ahamiyatga ega. Fundamental guruh yordamida fazolarning murakkablik darajasi, ularning “teshiklari” yoki bog‘lanish xususiyatlari haqida aniq tasavvur hosil qilish mumkin. Mazkur tushuncha nafaqat nazariy jihatdan muhim, balki amaliy masalalarda ham keng qo‘llaniladi. Xususan, fundamental guruh fazolarni gomotopik jihatdan tasniflash, ularni bir-biridan farqlash va o‘xshashliklarini aniqlashda asosiy vosita sifatida xizmat qiladi. Bu esa matematik modellashtirish, geometriya va boshqa ilmiy yo‘nalishlarda muhim natijalarga erishishga yordam beradi. Shuningdek, fundamental guruh tushunchasi orqali uzluksiz deformatsiyalar natijasida fazolarning qanday o‘zgarishi yoki o‘zgarmasligi aniqlanadi. Bu esa topologik invariantlar tushunchasining mohiyatini yanada chuqurroq anglashga olib keladi. Aynan shu invariantlar yordamida fazolarni umumiy xususiyatlariga ko‘ra guruhlash va o‘rganish imkoniyati yaratiladi. Bundan tashqari, fundamental guruh boshqa matematik sohalar, jumladan, differensial geometriya, matematik analiz va hatto nazariy fizika bilan ham uzviy bog‘liqdir. Masalan, fizikada fazoning tuzilishi va uning xossalarini o‘rganishda topologik yondashuv muhim rol o‘ynaydi. Shu jihatdan fundamental guruh tushunchasi nafaqat matematika doirasida, balki kengroq ilmiy tadqiqotlarda ham o‘z ahamiyatini namoyon etadi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Xo‘jayev T., To‘xtasinov M. Topologiya asoslari. Toshkent, 2010.
2. Rasulov A. Oliy matematika kursi. Toshkent, 2005.
3. Sobirov S. Matematikaning asosiy tushunchalari. Toshkent, 2012.
4. Karimov Sh. Oliy matematika. Toshkent, 2008.
5. O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim darsliklari va o‘quv qo‘llanmalari.