

**Differensial xaritalarning turlari: Immersiya va submersiya xaritalar**

Saliyeva Sevara Ma'mirbek qizi,

Andijon davlat pedagogika instituti

“Matematika va Informatika” kafedrasi o'qituvchisi E-mail:

saliyevasevara18@gmail.com

Mirzayeva Marjonaxon Musinjon qizi

Andijon davlat pedagogika instituti

Matematika yo'nalishi 2-bosqich talabasi,

E-mail: mirzayevamarjona0619@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada immersiya va submersiya xaritalarining differensial geometriyadagi nazariy asoslari yoritilgan. Silliqlik manifoldlar orasidagi akslantirishlarning differensial yordamida immersiya va submersiya tushunchalarining matematik mohiyati tahlil qilingan. Immersiya xaritalarining injektiv differensialga, submersiya xaritalarining esa surjektiv differensialga ega bo'lishi ilmiy jihatdan asoslab berilgan. Shuningdek, ushbu xaritalarning geometrik mazmuni, ularning lokal va global xossalari hamda manifoldlar nazariyasidagi ahamiyati bayon etilgan. Maqolada immersiya va submersiya xaritalariga oid matematik misollar, Jakobi matritsasi orqali ularning rangini aniqlash usullari ham keltirilgan. Bundan tashqari, embedding tushunchasi, regular qiymatlar teoremasi va differensial akslantirishlarning darajasi haqida ma'lumot berilgan. Immersiya va submersiya tushunchalarining differensial geometriya, nazariy fizika, mexanika hamda kompyuter grafikasi kabi sohalaridagi amaliy qo'llanilishlari yoritilgan.

Kalit so'zlar: immersiya, submersiya, sillikli akslantirish, differensial akslantirish, manifold, urinma fazo, Jakobi matritsasi, rang (rank), embedding, differensial geometriya.

Аннотация: В данной статье рассматриваются теоретические основы отображений погружения и субмерсии в дифференциальной геометрии. Математическая сущность понятий погружения и субмерсии анализируется с использованием дифференциала отражений между гладкими многообразиями. Научно обосновывается тот факт, что отображения погружения имеют инъективный дифференциал, а отображения субмерсии — сюръективный. Также описывается геометрический смысл этих отображений, их локальные и глобальные свойства, а также их значение в теории многообразий. В статье также приводятся математические примеры отображений погружения и субмерсии,



методы определения их цвета с использованием матрицы Якоби. Кроме того, представлена информация о понятии вложения, теореме о регулярном значении и степени дифференциальных отражений. Рассматриваются практические применения понятий погружения и субмерсии в таких областях, как дифференциальная геометрия, теоретическая физика, механика и компьютерная графика.

Ключевые слова: погружение, субмерсия, плавное отражение, дифференциальное отражение, многообразие, случайное пространство, матрица Якоби, ранг, вложение, дифференциальная геометрия.

Abstract: This article discusses the theoretical foundations of immersion and submersion maps in differential geometry. The mathematical essence of the concepts of immersion and submersion is analyzed using the differential of reflections between smooth manifolds. The fact that immersion maps have an injective differential and that submersion maps have a surjective differential is scientifically substantiated. The geometric meaning of these maps, their local and global properties, and their significance in manifold theory are also described. The article also presents mathematical examples of immersion and submersion maps, methods for determining their color using the Jacobi matrix. In addition, information is provided about the concept of embedding, the regular value theorem, and the degree of differential reflections. The practical applications of the concepts of immersion and submersion in such fields as differential geometry, theoretical physics, mechanics, and computer graphics are covered.

Keywords: immersion, submersion, smooth reflection, differential reflection, manifold, random space, Jacobi matrix, rank, embedding, differential geometry.

Silliq akslantirish tushunchasi: Faraz qilaylik, M va N — silliq manifoldlar bo'lsin va $f: M \rightarrow N$ — silliq akslantirish (xarita) bo'lsin. Har bir $p \in N$ nuqtada bu akslantirishning differensial (yoki Jakobi operatori) aniqlanadi: $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$

Bu yerda: a) $T_p M$ — M manifoldning p nuqtadagi urinma fazosi

b) $T_{f(p)} N$ — N manifoldning mos urinma fazosi.

Immersiya va submersiya aynan shu differensial akslantirish xossalari orqali aniqlanadi.

1. Immersiya tushunchasi: Agar har bir $p \in M$ nuqtada differensial akslantirish df_p **injektiv** (ya'ni yadro faqat nol vektordan iborat) bo'lsa, u holda f akslantirish **immersiya** deyiladi. $\ker(df_p) = \{0\} \Rightarrow f$ — immersiya.



Geometrik mazmuni. Immersiya past o'lchamli fazoni yuqori o'lchamli fazoga "botirib joylashtirish"ni ifodalaydi. Lokal ravishda egilish yoki burilish bo'lishi mumkin, lekin "siqilish" yo'q. O'lcham saqlanadi (yadro yo'q).

Misol: $f: R^2 \rightarrow R^3$, $f(u, v, u^2 + v^2)$ Bu xarita paraboloid sirtini hosil qiladi va u immersiya hisoblanadi, chunki uning Jakobi matritsasi har nuqtada to'liq rangga ega.

2. Submersiya tushunchasi. Agar har bir $p \in M$ nuqtada differensial akslantirish df_p surjektiv bo'lsa, ya'ni tasvir butun $T_{f(p)}N$ fazoni qamrab olsa, u holda f akslantirish submersiya deyiladi. $Im(df_p) = T_{f(p)}N \Rightarrow f$ – submersiya

Geometrik mazmuni: Submersiya yuqori o'lchamli fazoni past o'lchamli fazoga "proyeksiya qilish"ni ifodalaydi. Ayrim yo'nalishlarda siqilish mavjud bo'ladi, ortiqcha o'lchamlar yo'qoladi.

Misol: $f: R^2 \rightarrow R^3$, $f(x, y, z) = (x, y)$. Bu oddiy proyeksiya bo'lib, submersiya hisoblanadi, chunki differensial har nuqtada to'liq rangga ega va tasvir butun R^2 ni qamrab oladi.

Immersiya va submersiyaning solishtirilishi

Xususiyat	Immersiya	Submersiya
Differensial	Injektiv	Surjektiv
O'lcham	Oshadi yoki teng	Kamayadi yoki teng
Geometrik ma'no	"Joylashtirish"	"Proyeksiya"
Yadro	Nolga teng	Noldan farqli bo'lishi mumkin

Immersiya va submersiya bilan bog'liq tushunchalar, embedding (kiritish). Immersiyaning maxsus holi bo'lib, u global jihatdan ham bir qiymatli va topologik kiritish hisoblanadi. Ya'ni: immersiya + gomeomorfizm \rightarrow embedding.

Daraja (rank) tushunchasi. Akslantirishning darajasi Jakobi matritsasining rangiga teng: immersiyaning rang maksimal va kirish o'lchamiga teng, submersiyaning rang chiqish o'lchamiga teng.

Regular qiymatlar teoremasi. Agar $f: M \rightarrow N$ submersiya bo'lsa, unda $f^{-1}(q)$ (q — regular qiymat) silliq sirt (manifold) hosil qiladi.

Amaliy ahamiyati. Immersiyaning va submersiyaning tushunchalari quyidagi sohalarda muhim: differensial geometriyada sirt va manifoldlarni o'rganishda, nazariy fizikada (fazoviy



modellar), mexanikada harakatlarni tavsiflashda, kompyuter grafikasi va modellashtirishda.

Masalan: Immersiya orqali $2D$ sirtning $3D$ fazoda tasvirlash mumkin, submersiya orqali yuqori o'lchamli ma'lumotlarni soddalashtirish mumkin. Immersiya va submersiya xaritalari differensial geometriyada manifoldlar orasidagi akslantirishlarning lokal xossalari o'rganishda asosiy tushunchalardir. Immersiya fazoni "ichkariga joylashtirish", submersiya esa "tashqariga proyeksiya qilish" jarayonlarini ifodalaydi. Bu tushunchalar yordamida geometrik obyektlarning tuzilishi, o'lchamlari va ular orasidagi bog'lanishlar chuqur tahlil qilinadi. Shu sababli ular zamonaviy differensial geometriya va uning amaliy qo'llanishlarida muhim ahamiyat kasb etadi.

Xulosa: Immersiya va submersiya xaritalari differensial geometriyada manifoldlar orasidagi akslantirishlarning muhim lokal xossalari ifodalaydi. Immersiya injektiv differensial orqali fazoni "ichkariga joylashtirish"ni, submersiya esa surjektiv differensial orqali "proyeksiya qilish"ni ifodalaydi. Ushbu tushunchalar Jakobi matritsasi va uning rangi orqali aniqlanib, geometrik obyektlarning o'lchami va tuzilishini tahlil qilish imkonini beradi. Natijada, immersiya va submersiya xaritalari nafaqat nazariy jihatdan, balki amaliy sohalarida ham muhim ahamiyatga ega bo'lib, differensial geometriyaning asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Xudoyberganov G'. **Oliy matematika kursi.** – Toshkent: Fan, 2008.
2. Yusupov M. **Chiziqli algebra va analitik geometriya.** – Toshkent: Universitet, 2012.
3. Sodiqov Q. **Differensial geometriya elementlari.** – Toshkent: Fan, 2015.
4. Ziyonet – <https://www.ziyonet.uz>
5. National Library of Uzbekistan – <https://natlib.uz>
6. Wikipedia – <https://www.wikipedia.org>