Vol.4 №4 (2026). April
Journal of Effective
innovativepublication.uz
Learning and Sustainable Innovation

Rushe teoremasi.Argument prinspi.

Elomonova Dildora Alisher qizi
Fizika-matematika fakulteti Matematika-ta'lim yo'nalishi 3-kurs talabasi.

Annotatsiya: Biz bu maqolada Rushening formulasini keltirib, tatbiqlarini ko'rib chiqdik va turli xil misollarga tadbiqini ko'rdik.
Kalit so'zlar. Rushe teoremasi.golomorf funksiya,argument prinspi.

Aytaylik kompleks sonlar tekisligida $f(z)$ funksiya berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar D sohada $f(z)$ golomorf funksiya qutbdan boshqa maxsus nuqtalarga ega bo'lmasa u holda $f(z)$ funksiya D sohada meramorf funksiya deyiladi.

Teorema-1. Faraz qilaylik $f(z)$ funksiya chegarasi bo'lakli silliq, chegaralangan D sohaning yopig'ida meramorf bo'lib, sohaning chegarasida funksiyaning nollari ham qutblari ham yotmasin. Agar N va P lar mos ravishda $f(z)$ funksiyaning D sohadagi nollari va qutblarining umumiy soni bo'lsa (har bir nol va qutb nechi karrali bo'lsa shuncha marta hisoblanadi) u holda

$$N-P=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)}dz \tag{1}$$

tenglik o'rinli. Bu yerda ∂D - yo'nalish berilgan (orientrlangan) chegara.

Isbot.

Agar $a_1,a_2...,a_l$ -nollar, $b_1,b_2...,b_m$ -qutblar bo'lsa, unda:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{v=1}^{l}res_{a_v}g+\sum_{v=1}^{m}res_{b_v}g \tag{2}$$

bu yerda $g=\frac{f'}{f}$.

Ma'lumki:

$$res_{a_v}g=n_v, res_{a_v}g=-p_v \tag{3}$$

bu yerda: n_v -nolning tartibi, p_v -qutbning tartibi.

Shundan:

$$N=\sum n_v, P=\sum p_v$$

natijada (1) formula kelib chiqadi.

Teorema-2.(Argument prinspi). $N-P$ ayirma, soha chegarasi bo‘ylab aylanishda funksiya argumenti orttirmasining 2π ga bo‘linganiga teng.

$$N-P=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D}\arg f\ . \qquad (4)$$

Bu formula shuni anglatadiki, $f(z)$ qiymati kontur bo’ylab o’zgarganda, argumentning umumiy o’zgarishi (burchak aylanishi) nollar va qutblar farqiga teng.

Geometrik talqin: (4) ning o‘ng tomoni z nuqta ∂D bo‘ylab harakatlanganda, $w=f(z)$ vektori $w=0$ nuqtasi atrofida necha marta to‘liq aylanishini ifodalaydi. Bu miqdor ∂D^* tasvirning $w=0$ nuqtasiga nisbatan indeksi deb ataladi va $ind_0\partial D^*$ kabi belgilanadi.

$$N-P=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D^*}\arg w=ind_0\partial D^* \qquad (5)$$

Eslatma.(a- nuqtalar uchun)Agar $f(z)=\mathrm{a}$ tenglamaning ildizlarini qarasak:

$$N_a-P=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)-a}dz=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D}\arg(f(z)-a)$$

yoki geometrik ko’rinishda,

$$N_a-P=\frac{1}{2\pi}\Delta\arg(\mathrm{w}-a)=\mathrm{ind}_a\,\partial D^*.$$

ko’rinishida bo’ladi.

N-P qiymat integral orqali ham, argument o’zgarishi orqali ham topiladi. Geometrik jihatdan bu tasvir egri chizig’ning aylanishlar soni.

Teorema-3.(Rushe teoremasi).Faraz qilaylik f va g funksiyalar uzluksiz va D sohani yopig’ida golomorf bo’lib $\forall z\in\partial D$ uchun

$$|f(z)|>|\mathrm{g}(z)|$$

o’rinli bo’lsa u holda f va $f+g$ funksiyalar D sohada bir xil sondagi nollarga ega bo’ladi.

Algebraik ko’phadlar haqida quyidagi mulohazalar yuritiladi.

Teorema-4. N-darajali har qanday P_n ko’phad kompleks tekislikda n ta ildizga ega. Bu yerda Rushe teoremasi ishlatiladi.

$$P_n=a_0z^n+(a_1z^{n-1}+\ldots+a_n)$$

ko'rinishida yozsak, yetarlicha katta radiusli aylana uchun $f = a_0 z^n$ funksiyasi qolgan barcha hadlardan g funksiyasidan modul jihatdan katta bo'ladi. $F = a_0 z^n$ funksiyaning n ta noli borligidan, butun ko'phadning ham n ta noli borligi kelib

Misol. Berilgan $P(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ ko'phadning birlik doira ichida, $|z| < 1$ sohasida nechta ildizi borligini aniqlang.

Yechish: Rushe teoremasini qo'llash uchun biz P(z) funksiyani ikki qismga ajratib olishimiz kerak: f(z) va g(z) . Bunda asosiy shart - $|z| = 1$ aylanada $|f(z)| > |g(z)|$ bo'lishi lozim. Soha chegarasi $|z| = 1$. Ko'phad hadlarini tahlil qilamiz:

z^8 ning moduli $|1|^8 = 1$, $-4z^5$ ning moduli 4, z^2 ning moduli 1, -1 ning moduli 1.

Eng katta modulga ega bo'lgan hadni $f(z)$ deb olamiz- $f(z) = -4z^5$.

Qolgan barcha hadlarni esa g(z) deb belgilaymiz- $g(z) = z^8 + z^2 - 1$.

$$|f(z)| = |-4z^5| = 4 \cdot 1 = 4$$

$$|g(z)| = |z^8 + z^2 - 1| \le |z^8| + |z^2| + 1 = 3$$

ko'rib turganimizdek, $|z| = 1$ aylanada 4>3, ya'ni $|f(z)| > |g(z)|$ shart bajariladi.

Rushe teoremasiga ko'ra $f(z)$ va $f(z) + g(z) = P(z)$ funksiyalarning berilgan soha ichidagi nollari soni teng bo'ladi.

$F(z) = -4z^5$ funksiyaning 5 ta noli bor (chunki z=0 nuqtasi 5-tartibli ildiz). Demak, Rushe teoremasiga ko'ra, brilgan $P(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ ko'phadning ham birlik doira ichida 5 ta ildizi mavjud.

Rushe teoremasi murakkab ko'phadning ildizlarini aniq hisoblamasdan turib, ularning qaysi sohada va qancha miqdorda ekanligini topishga yordam beradi.

Javob: $|z| < 1$ sohasida 5 ta ildizi bor.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1) Введение в комлексный анализ. Б.В.Шабат. Москва-1976.
2) Г.Худойберганов ва бошкалар - Комплекс анализ. Тошкент-1978.
3) И.П.Натансон. Теория функций вещественной переменной. Москва-1974.
4) Айзенберг Л. А. Формулы Карлемана в комплексном анализе.