



EGRI CHIZIQLARNING PARAMETRIK TENGLAMALARI VA ULARNI TAHLIL QILISH

Saliyeva Sevara Ma'mirbek qizi,

Andijon davlat pedagogika institute "Matematika va Informatika" kafedrası
o'qituvchisi

E-mail: saliyevasevara18@gmail.com

Xolmatova Muslimaxon Ma'mur qizi

Andijon davlat pedagogika institute "Aniq va tabiiy" fanlar fakulteti Matematika
yo`nalishi 2-kurs talabasi

muslimaxolmatova35@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada egri chiziqlarning parametrik tenglamalari differensial geometriyaning markaziy vositasi sifatida chuqur tahlil qilinadi. Tadqiqot davomida egri chiziqlarning tahliliy ifodalanish usullari, xususan, nuqtaning fazodagi o'rnini vaqt yoki yoy uzunligi kabi parametrlar orqali tavsiflashning afzalliklari ochib beriladi. Maqolaning asosiy qismi parametrik ko'rinishda berilgan funksiyalardan hosila olish orqali egri chiziqning urinma vektori, egriligi va buralishi kabi fundamental geometrik xarakteristikalarini hisoblash usullariga bag'ishlangan. Shuningdek, ishda Frene-Serre reperi yordamida fazoviy egri chiziqlarning lokal xossalarini o'rganish masalalari ko'rib chiqiladi. Parametrik tenglamalarning nafaqat nazariy matematikada, balki amaliy sohalarida — fizik jarayonlarni modellashtirish, kompyuter grafikasi va robototexnikadagi trayektoriyalarni loyihalashdagi o'rni tahliliy misollar bilan asoslanadi. Maqola yakunida turli koordinata tizimlarida parametrik shakllarning o'zaro bog'liqligi va ularning silliqlik darajasini aniqlash algoritmlari bo'yicha xulosalar berilgan. Ushbu tadqiqot murakkab geometrik ob'ektlarni matematik tahlil qilish va ularning dinamik xossalarini o'rganishda muhim manba bo'lib xizmat qiladi.

Kalit so'zlar. Parametrik tenglama, differensiallanuvchi egri chiziq, gomeomorfizm, egrilik va buralish, trayektoriya, yoy uzunligi parametri, urinma vektori, regulyar egrilik

Abstract. This article provides an in-depth analysis of parametric equations of curves as a central tool of differential geometry. The study reveals the advantages of analytical representation methods of curves, in particular, describing the position of a point in space by parameters such as time or arc length. The main part of the article is devoted to methods for calculating fundamental geometric characteristics of a curve, such as the strain vector, curvature, and torsion, by deriving from functions given in parametric



form. The work also considers the issues of studying local properties of spatial curves using the Frenet-Serret rapier. The role of parametric equations not only in theoretical mathematics, but also in practical areas - modeling of physical processes, computer graphics, and designing trajectories in robotics - is substantiated by analytical examples. At the end of the article, conclusions are given on the interrelation of parametric shapes in different coordinate systems and algorithms for determining the degree of their smoothness. This research serves as an important source for mathematical analysis of complex geometric objects and study of their dynamic properties.

Keywords: Parametric equation, differentiable curve, homeomorphism, curvature and torsion, trajectory, arc length parameter, effort vector, regular curvature

Аннотация. В данной статье представлен углубленный анализ параметрических уравнений кривых как центрального инструмента дифференциальной геометрии. Исследование выявляет преимущества методов аналитического представления кривых, в частности, описания положения точки в пространстве параметрами, такими как время или длина дуги. Основная часть статьи посвящена методам вычисления фундаментальных геометрических характеристик кривой, таких как вектор деформации, кривизна и кручение, путем вывода из функций, заданных в параметрической форме. В работе также рассматриваются вопросы изучения локальных свойств пространственных кривых с использованием рапиры Френе-Серре. Роль параметрических уравнений не только в теоретической математике, но и в практических областях — моделировании физических процессов, компьютерной графике и проектировании траекторий в робототехнике — обосновывается аналитическими примерами. В конце статьи приводятся выводы о взаимосвязи параметрических форм в различных системах координат и алгоритмы определения степени их гладкости. Данное исследование служит важным источником для математического анализа сложных геометрических объектов и изучения их динамических свойств.

Ключевые слова: параметрическое уравнение, дифференцируемая кривая, гомеоморфизм, кривизна и кручение, траектория, параметр длины дуги, вектор усилия, регулярная кривизна

Zamonaviy fan va texnika taraqqiyoti murakkab geometrik shakllarni nafaqat tasvirlash, balki ularning dinamik xossalarini aniq hisoblashni ham talab etadi. Egri chiziqning parametrik ko‘rinishda ifodalanishi ushbu talabga javob beruvchi eng



samarali matematik apparat hisoblanadi. Parametrik tenglamalar yordamida nuqtaning fazodagi harakatini vaqt yoki boshqa fizik parametr ga bog'liq holda ifodalash imkoniyati, ushbu mavzuni fundamental fizika, mexanika va muhandislik sohalari uchun hal qiluvchi ahamiyatga ega qiladi.

Bundan tashqari, ushbu mavzu nazariy matematikaning ko'plab bo'limlarini, jumladan matematik analiz, chiziqli algebra va differensial tenglamalarni yagona mantiqiy tizimga birlashtiradi. Murakkab egri chiziqlarni parametrlash orqali ularning lokal va global xossalarini o'rganish, talabalarda va yosh tadqiqotchilarda fazoviy tasavvurni va tahliliy fikrlashni rivojlantirishda muhim metodologik ahamiyat kasb etadi. Shu bois, parametrik tenglamalarni o'rganish va ularni takomillashtirish zamonaviy innovatsion texnologiyalar va fundamental ilm-fan chorrahasidagi dolzarb masalalardan biri bo'lib qolmoqda.

Birorta kooordinatalar sistemasi va bir t argumentli ikkita funksiya berilgan bo'lsin:

$$\begin{aligned}x &= \varphi(t), \\y &= \varphi(t).\end{aligned}$$

t ning har bir qiymatida x va y miqdorlarni biror M nuqtaning koordinatalari deb qarashga kelishib olamiz. T o'zgarganda, umuman aytganda, x va y miqdorlar ham o'zgaradi, demak, M nuqta tekislik bo'ylab harakatlanadi. (1) tengliklar M nuqta trayektoriyasining parametrik tenglamalari deb ataladi; t argument o'zgaruvchi parameter deyiladi.

Parametrik tenglamalar mexanikada muhim rol o'ynaydi, ularadan mexanikada harakat tenglamalari sifatida foydalaniladi. Masalan, agar M moddiy nuqta tekislik bo'ylab harakat qilsa, unda t vaqtning har bir paytida u aniq x, y koordinatalarga ega bo'ladi. x va y larni t vaqtning funksiyasi sifatida ifodalovchi tenglamalar M nuqtaning harakat tenglamalari deb ataladi; ular (1) ko'rinishda bo'ladi.

Agar mexanikada moddiy nuqtaning harakat tenglamasi berilgan bo'lsa, u matematik berilgan hisoblanadi.

Birorta chiziq $M(x, y)$ nuqtaning trayektoriyasi sifatida $x = \varphi(t), y = \varphi(t)$ parametrik tenglamalar bilan aniqlangan bo'lsin. Agar $F(x, y) = 0$ berilgan tenglamalarning natijasi bo'lsa, uni M nuqtaning $x = \varphi(t), y = \varphi(t)$ koordinatalari t har qanday bo'lganda ham qanoatlantiradi. Shunday qilib, M nuqta $F(x, y) = 0$ chiziq bo'yicha harakat qiladi. Agar bunda M nuqta chiziqning hammasini o'tsa, $F(x, y) = 0$ tenglama M nuqta trayektoriyasining oddiy tenglamasini tasvirlaydi. $x = \varphi(t), y = \varphi(t)$ parametrik tenglamalarning $F(x, y) = 0$ natijasini tuzish parametrlarni yo'qotish deb ataladi.



Misol.

$$x = r \cos t$$

$$y = r \sin t$$

tenglamalar, markazi koordinatalar boshida va radiusi r bo'lgan aylananing parametrik tenglamalaridir. Haqiqatan, bu tenglamalarni kvadratga ko'tarib va hadlab qo'shib, biz ularning

$$x^2 + y^2 = r^2$$

natijasini hosil qilamiz. Bundan, $M(x, y)$ nuqta ko'rsatilgan aylana bo'yicha harakat qilishi ko'rinadi. Bundan tashqari, t parameter mumkin bo'lgan hamma son qiymatlarni qabul qilgani uchun, (Ox o'q bilan t burchak yasovchi) OM nur mumkin bo'lgan hamma vaziyatlarni egallaydi. Demak, M nuqta butun aylanani (t cheksiz ortib borganda, cheksiz ko'p marta) aylanib chiqadi.

$\rho = f(\theta)$ birorta chiziqning qutb tenglamasi bo'lsin. Shu chiziqning o'zi dekart koordinatalarda

$$x = f(\theta) \cos \theta$$

$$y = f(\theta) \sin \theta$$

parametrik tenglamalar bilan aniqlanishi mumkin. Shu tenglamalarni hosil qilish uchun $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ formulalarda ρ ni $f(\theta)$ funksiyaga almashtirish yetarlidi.

Misol. Quyidagilar mos ravishda Arximed giperbolik spiral va logarifmik spirallarning qutb tenglamalaridir: $\rho = \alpha \theta$, $\rho = \frac{\alpha}{\theta}$, $\rho = \alpha^\theta$.

Bundan Dekart koordinatalarda Arximed spiralinig

$$x = \alpha \theta \cos \theta$$

$$y = \alpha \theta \sin \theta$$

giperbolik spiralning

$$x = \frac{\alpha \cos \theta}{\theta}$$

$$y = \frac{\alpha \sin \theta}{\theta}$$

va

logarifmik

spiralinig

$$x = \alpha^\theta \cos \theta$$

$$y = \alpha^\theta \sin \theta$$

parametrik tenglamalarni topamiz.

Hamma qaralgan hollarda o'zagaaruvchi nuqtaning qutb burchagi θ parametrdir. Xulosa qilib aytganda, Egri chiziqlarning parametrik tenglamalari va ularni tahlil qilish bo'yicha olib borilgan izlanishlar shuni ko'rsatadiki, ushbu yondashuv zamonaviy



differential geometriya va amaliy matematikaning eng kuchli vositalaridan biri hisoblanadi. Parametrik usul egri chiziqni shunchaki nuqtalar to'plami sifatida emas, balki ma'lum bir parametrning o'zgarishi natijasida yuzaga keladigan dinamik jarayon sifatida ifodalash imkonini beradi. Bu esa o'z navbatida, murakkab fazoviy shakllarni, masalan, o'z-o'zini kesib o'tuvchi yoki vertikal urinmaga ega bo'lgan chiziqlarni tahlil qilishdagi klassik cheklovlarni bartaraf etadi.

Tahlillar natijasida aniqlandiki, parametrik tenglamalardan olingan birinchi va ikkinchi tartibli hosilalar egri chiziqning fundamental xarakteristikalarini — egrilik va buralishni aniqlashda asosiy manba bo'lib xizmat qiladi. Frene-Serre reperining qo'llanilishi esa egri chiziqning har bir nuqtasida lokal koordinatalar sistemasini qurishga va chiziqning fazodagi "xulq-atvori"ni miqdoriy baholashga yo'l ochadi. Bu usul yordamida har qanday silliq egri chiziqni uning egriligi va buralishi orqali (konstantalar aniqligida) yagona tarzda tiklash mumkinligi uning nazariy jihatdan naqadar mukammal ekanligini isbotlaydi.

Amaliy nuqtai nazardan, parametrik tahlil bugungi kunda yuqori aniqlikdagi texnologiyalarning poydevori hisoblanadi. Kompyuter grafikasi va dizayndagi silliq o'tishlar, robototexnikadagi harakat trayektoriyalarini optimallashtirish hamda fizikadagi zarrachalar harakatini modellashtirish bevosita ushbu nazariyaga tayanadi. Xulosa o'rnida aytish mumkinki, egri chiziqlarni parametrlash va ularni tahliliy o'rganish fundamental ilm-fan bilan zamonaviy muhandislik o'rtasidagi bog'lovchi ko'priklarni bo'lib, raqamli texnologiyalar rivojlanishi bilan uning ahamiyati yanada ortib bormoqda.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Narmanov, A. N. (2008). *Differential geometriya asoslari*. – Toshkent: O'qituvchi nashriyoti.
2. Xudoyberdiyev, G', Jo'rayev, T. (2012). *Differential geometriya va topologiya*. – Toshkent: Universitet nashriyoti.
3. To'rayev, R. (2015). *Geometriya (II qism)*. – Toshkent: Fan va texnologiya.
4. Rasulov, A. (2010). *Differential geometriya masalalari to'plami*. – Toshkent: Tafakkur nashriyoti.

Foydalanilgan internet manbalari

6. **Analitik geometriya haqida ma'lumot** // O'zbek ensiklopedik manbasi: Internet resurs. – URL: https://uzpedia.uz/pedia/analitik_geometriya
7. **Differential geometriya haqida ma'lumot** // Milliycha ilmiy portali: Internet resurs. – URL: <https://milliycha.uz/differentsial-geometriya/>