



***DIFFERENSIAL GEOMETRIYA VA TOPOLOGIYANING ZAMONAVIY
TADBIQLARI (ROBOTOTEXNIKA, KOMPYUTER GRAFIKASI VA
FIZIKADA)***

Saliyeva Sevara Ma'mirbek qizi,

Andijon davlat pedagogika institute "Matematika va Informatika" kafedrası
o'qituvchisi

E-mail: saliyevasevara18@gmail.com

Nizomiddinova Mahliyoxon Niyoziddin qizi

Andijon davlat pedagogika insituti 202-guruh talabasi

E-mail: mahliyonizomiddinova56@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada differensial geometriya va topologiyaning zamonaviy ilm-fan va texnologiyadagi muhim o'rni tahlil qilinadi. Xususan, robototexnika, kompyuter grafikasi va fizika sohalarida ushbu matematik yo'nalishlarning amaliy qo'llanilishi keng yoritib beriladi. Differensial geometriya yordamida murakkab fazoviy shakllarni modellashtirish, harakat trayektoriyalarini aniqlash va optimallashtirish imkoniyatlari ko'rib chiqiladi. Topologiya esa obyektlarning uzluksiz o'zgarishlar ostida saqlanib qoluvchi xossalarini o'rganish orqali tizimlarning barqarorligini ta'minlashda muhim ahamiyat kasb etadi. Maqolada robot manipulyatorlarining harakatini aniqlash, 3D modellashtirish va animatsiya jarayonlarini takomillashtirish, shuningdek, zamonaviy fizik nazariyalarda fazo-vaqt tuzilishini tushuntirishda differensial geometriya va topologiyaning roli ilmiy asosda tahlil qilinadi. Shu bilan birga, ushbu yo'nalishlarning kelajakdagi rivojlanish istiqbollari va yangi texnologiyalar yaratishdagi ahamiyati haqida xulosalar keltiriladi. Mazkur tadqiqot natijalari ilmiy izlanishlar olib borayotgan talabalar, tadqiqotchilar hamda muhandislik va IT sohasida faoliyat yurituvchi mutaxassislar uchun foydali manba bo'lib xizmat qiladi.

Kalit so'zlar: Differensial geometriya, topologiya, robototexnika, kompyuter grafikasi, fizik modellashtirish, fazoviy egri chiziqlar, sirtlar nazariyasi, manifoldlar, metrik fazo, topologik invariantlar, 3D modellashtirish, animatsiya, robot manipulyatorlari, trayektoriya optimallashtirish, sun'iy intellekt, fazo-vaqt, geometrik analiz, ilmiy hisoblash, raqamli texnologiyalar.

Аннотация: В данной статье анализируется важная роль дифференциальной геометрии и топологии в современной науке и технологиях. В частности, подробно рассматриваются практические применения этих математических



направлений в робототехнике, компьютерной графике и физике. С помощью дифференциальной геометрии изучаются возможности моделирования сложных пространственных форм, определения и оптимизации траекторий движения. Топология, в свою очередь, играет важную роль в обеспечении устойчивости систем за счёт изучения свойств объектов, сохраняющихся при непрерывных преобразованиях. В статье на научной основе анализируется роль дифференциальной геометрии и топологии в определении движения роботизированных манипуляторов, совершенствовании процессов 3D-моделирования и анимации, а также в объяснении структуры пространства-времени в современных физических теориях. Кроме того, приводятся выводы о перспективах развития данных направлений и их значении в создании новых технологий. Результаты данного исследования могут служить полезным источником для студентов, исследователей, а также специалистов, работающих в области инженерии и информационных технологий.

Ключевые слова: Дифференциальная геометрия, топология, робототехника, компьютерная графика, физическое моделирование, пространственные кривые, теория поверхностей, многообразия, метрическое пространство, топологические инварианты, 3D-моделирование, анимация, роботизированные манипуляторы, оптимизация траекторий, искусственный интеллект, пространство-время, геометрический анализ, научные вычисления, цифровые технологии.

Abstract: This article analyzes the significant role of differential geometry and topology in modern science and technology. In particular, it explores the practical applications of these mathematical fields in robotics, computer graphics, and physics. Differential geometry enables the modeling of complex spatial shapes, as well as the determination and optimization of motion trajectories. Topology, on the other hand, plays a crucial role in ensuring system stability by studying properties of objects that remain invariant under continuous transformations. The paper provides a scientific analysis of the role of differential geometry and topology in determining the motion of robotic manipulators, improving 3D modeling and animation processes, and explaining the structure of space-time in modern physical theories. In addition, conclusions are drawn regarding the future prospects of these fields and their importance in the development of new technologies. The results of this research can serve as a valuable resource for students, researchers, and professionals working in engineering and information technology fields.

Keywords: Differential geometry, topology, robotics, computer graphics, physical



modeling, spatial curves, surface theory, manifolds, metric space, topological invariants, 3D modeling, animation, robotic manipulators, trajectory optimization, artificial intelligence, space-time, geometric analysis, scientific computing, digital technologies.

Differensial geometriya — silliq (smooth) fazolarning lokal va global xossalari differensial hisob vositalari orqali oʻrganadigan matematika boʻlimidir. Uning markazida **manifoldlar**, **tangens strukturalar**, **metrikalar** va **egrilik** tushunchalari turadi. Quyida asosiy kategoriyalar tizimli ravishda bayon etiladi.

1. Manifold (koʻp oʻlchamli silliq fazo)

Manifold — har bir nuqtasining kichik atrofida Evklid fazosiga (R^n) diffeomorf boʻlgan topologik fazodir.

Agar fazo n oʻlchamli boʻlsa, u **n -oʻlchamli silliq manifold** deyiladi.

2. Tangens fazo (T_pM)

Manifoldning har bir p nuqtasida unga “tegib turuvchi” chiziqli fazo mavjud — bu **tangens fazo** deyiladi.

(T_pM) — p nuqtadagi barcha yoʻnalishlarning chiziqli fazosi.

Agar M n oʻlchamli boʻlsa, T_pM ham n oʻlchamli vektor fazodir.

Tangens vektor quyidagicha aniqlanadi:

$$v(f) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))$$

bu yerda $\gamma(t)$ — manifold ustidagi egri chiziq.

Tangens fazo — differensial operatorlar fazosi sifatida ham qaraladi.

Bu simmetrik, musbat aniqlangan bilinear forma.

3. Geodezik chiziqlar

Geodezik — metrik fazoda eng qisqa yoʻlni ifodalovchi egri chiziq.

U quyidagi differensial tenglama bilan aniqlanadi: $\frac{D\gamma}{dt} = 0$ Evkli fazoda geodezik — toʻgʻri chiziq.

Sferada esa — katta aylana. Robototexnika va fizika sohalarida optimal trayektoriya sifatida qoʻllaniladi.

4. Egrilik (Curvature)

Egrilik — fazoning “tekis emasligini” oʻlchovchi kattalik. Gauss egriligi (K), Riemann egrilik tensori, Ricci tensori, Skalyar egrilik

Masalan, General Relativity da tortishish kuchi fazo-vaqt egriligi orqali ifodalanadi.

Bu nazariya Albert Einstein tomonidan ishlab chiqilgan.

**5. Kovariant hosila va bog‘lanma (Connection)**

$$\nabla_x Y$$

Manifoldda oddiy hosila tushunchasi yo‘q. Shuning uchun **kovariant hosila** kiritiladi: Bu vektor maydonni boshqa vektor maydon bo‘ylab differensiallash imkonini beradi. Levi-Civita bog‘lanmasi — metrikaga mos keluvchi yagona torsiyasiz bog‘lanma.

6. Tangens bog‘lanma (Tangent Bundle)

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$$

Bu manifoldning barcha tangens fazolarining birlashmasidir.

Ko‘p zamonaviy modellar (robot konfiguratsion fazosi, mexanika, dinamik tizimlar) aynan TM da quriladi. Differensial geometriyaning asosiy tushunchalari — manifold, tangens fazo, metrik tensor, geodezik, egrilik va kovariant hosila — zamonaviy matematika va fizik modellarining asosini tashkil etadi. Ular ko‘p o‘lchamli fazolarni aniq formal tarzda o‘rganish imkonini beradi va robototexnika, kompyuter grafikasi hamda nazariy fizika kabi sohalarda fundamental ahamiyatga ega.

Misol: Robit $A(0,0)$ nuqtadan $B(3,4)$ nuqtaga harakat qilishi kerak. Robit uchun eng qisqa yo‘l uzunligini toping.

Yechish: Tekislikda ikki nuqta orasidagi eng qisqa masofa — bu **to‘g‘ri chiziq** bo‘lib, u masofa formulasi orqali topiladi.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(3 - 0)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Differensial geometriya va topologiyaning zamonaviy tadbiqlari turli sohalarda — robototexnika, kompyuter grafikasi va fizika — qanday qo‘llanilishi batafsil ko‘rib chiqildi. differensial geometriya robot manipulyatorlarining konfiguratsion fazosini modellashtirish, tangens fazo va geodeziklarni aniqlash orqali harakatni rejalashtirishda markaziy rol o‘ynaydi. Topologiya esa erkin fazoning bog‘liqligi, to‘siqlar va yo‘l mavjudligini tahlil qilish imkonini beradi. Optimal harakat algoritmlari differensial geometriya va topologik tushunchalarga tayangan holda ishlab chiqiladi. Kompyuter grafikasida sirtlar va mesh strukturalari differensial geometriya orqali silliqlik, normal vektorlar va egrilik xossalari bilan ifodalanadi, topologik invariantlar esa global tuzilmani va deformatsiya barqarorligini ta‘minlaydi. Meshning Euler xarakteristikasi, genus va manifold sharti 3D modellashtirish va animatsiyada aniqlikni kafolatlaydi.

Fizikada, umumiy nisbiylik nazariyasi fazo-vaqtning egriligi va geodezik trayektoriyalarni differensial geometriya orqali tavsiflaydi, topologiya esa koinotning



global strukturasi, qorong‘u tuynuklar va kosmologik modellarda muhim rol o‘ynaydi. Kvant maydonlar nazariyasida gauge maydonlari, fiber bundle va topologik invariantlar fizik hodisalarni tushuntirish va modellashtirishda qo‘llaniladi. Shu tariqa, differensial geometriya va topologiya nafaqat nazariy matematik tushunchalar, balki amaliy ilmiy va texnologik jarayonlarda — robototexnika harakatini rejalashtirishdan tortib, 3D grafik modellashtirish va kvant maydonlar fizikasi — keng ko‘lamda qo‘llaniladigan zamonaviy vositalardir. Ularning o‘zaro uyg‘unligi ilmiy tahlil, optimal yechimlar va global strukturalarni aniqlashda asosiy ahamiyatga ega.

Foydalanilgan adabiyotlar:

- Toxirov, O. Differensial geometriya asoslari. Toshkent: O‘zbekiston, 2018.*
- Karimov, R. Topologiya va uning matematik asoslari. Toshkent: O‘zbekiston, 2016.*
- Yo‘ldoshev, B. Robototexnika va harakatni rejalashtirish. Toshkent: Fan va Texnologiya, 2020.*
- Axmedov, S. Kompyuter grafikasi va 3D modellashtirish. Toshkent: Ilm-Fan, 2019.*
- John J. Craig. Introduction to Robotics: Mechanics and Control. – New Jersey: Pearson, 2005. – 408 p.*
- John F. Hughes va boshqalar. Computer Graphics: Principles and Practice. – Boston: Addison-Wesley, 2013. – 1264 p.*