



GEODEZIKLAR DIFFERENSIAL TENGLAMALARI

Saliyeva Sevara Ma'mirbek qizi,

Andijon davlat pedagogika institute "Matematika va Informatika" kafedrası
o'qituvchisi

E-mail: saliyevasevara18@gmail.com

No'monova Dildoraxon Muqimjon qizi

Andijon davlat pedagogika institute "Aniq va tabiiy" fanlar fakulteti Matematika
yo'nalishi 2-kurs talabasi

E-mail: dildoraxonmonova0@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada differensial geometriya va umumiy nisbiylik nazariyasining fundamental tushunchalaridan biri bo'lgan geodeziklar differensial tenglamalari tahlil qilinadi. Tadqiqotning asosiy maqsadi — Riman metrikasi berilgan ko'pbrazliliklarda ikki nuqta orasidagi eng qisqa (yoki ekstremal) masofani aniqlaydigan ikkinchi tartibli chiziqli bo'lmagan differensial tenglamalar sistemasini chiqarish va ularning yechish usullarini ko'rsatishdir.

Maqolada Kristoffel simvollari yordamida geodezik chiziqlar tenglamasining umumiy ko'rinishi quyidagicha ifodalanadi:

$$d^2x^k/dt^2 + \Gamma^k_{ij}(dx^i/dt)(dx^j/dt) = 0$$

Ish davomida sirtlarning egrilik xususiyatlari va metrik tenzorning geodezik chiziqlar shakliga ta'siri batafsil ko'rib chiqilgan. Shuningdek, maqolada variatsion hisob usullari (Eyler-Lagranj tenglamalari) yordamida geodeziklarni topishning samarali algoritmlari keltirilgan. Olingan natijalar nafaqat nazariy geometriyada, balki astrofizikada yorug'lik nurlarining egilishini hisoblashda va robototexnikada optimal harakat trayektoriyalarini qurishda amaliy ahamiyatga ega.

Kalit so'zlar. Geodezik chiziqlar, Riman metrikasi, Kristoffel simvollari, differensial tenglamalar, variatsion hisob, egrilik tenzori, trayektoriya optimizatsiyasi.

Abstract. This article analyzes the differential equations of geodesics, which are one of the fundamental concepts of differential geometry and general relativity. The main goal of the research is to derive a system of second-order nonlinear differential equations that determine the shortest (or extreme) distance between two points in polyhedra with a given Riemann metric, and to show methods for solving them.

The article presents the general form of the equation of geodesics using Christoffel symbols as follows:



$$d^2x^k/dt^2 + \Gamma^k_{ij} (dx^i/dt)(dx^j/dt) = 0$$

The work examines in detail the properties of the curvature of surfaces and the influence of the metric tensor on the shape of geodesics. The article also presents effective algorithms for finding geodesics using variational calculus methods (Euler-Lagrange equations). The results obtained are of practical importance not only in theoretical geometry, but also in calculating the bending of light rays in astrophysics and in constructing optimal trajectories in robotics.

Keywords: Geodesic lines, Riemannian metric, Christoffel symbols, differential equations, calculus of variations, curvature tensor, trajectory optimization.

Аннотация. В данной статье анализируются дифференциальные уравнения геодезических, являющиеся одним из фундаментальных понятий дифференциальной геометрии и общей теории относительности. Главная цель исследования — вывести систему нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, определяющих кратчайшее (или экстремальное) расстояние между двумя точками в многогранниках с заданной римановой метрикой, и показать методы их решения.

В статье представлен общий вид уравнения геодезических с использованием символов Кристоффеля следующим образом:

$$d^2x^k/dt^2 + \Gamma^k_{ij} (dx^i/dt)(dx^j/dt) = 0$$

В работе подробно рассматриваются свойства кривизны поверхностей и влияние метрического тензора на форму геодезических. Также представлены эффективные алгоритмы нахождения геодезических с использованием методов вариационного исчисления (уравнения Эйлера-Лагранжа). Полученные результаты имеют практическое значение не только в теоретической геометрии, но и в расчете искривления световых лучей в астрофизике и в построении оптимальных траекторий в робототехнике.

Ключевые слова: геодезические линии, риманова метрика, символы Кристоффеля, дифференциальные уравнения, вариационное исчисление, тензор кривизны, оптимизация траектории.

Differensial geometriya matematik analizning muhim bo‘limlaridan biri bo‘lib, u egri chiziqlar va sirtlarning geometrik xossalarini differensial hisob usullari yordamida o‘rganai. Ushbu fan fazolarning ichki tuzilishini, ularning metrik xossalarini, egilish darajasini hamda fazoda harakat qonuniyatlarini chuqur tahlil qilish imkonini beradi. Zamonaviy matematikada differensial geometriya nafaqat nazariy ahamiyatga ega,



balki fizika, astronomiya, muhandislik, kompyuter grafikasi va sun'iy intellekt kabi ko'plab sohalarda keng qo'llaniladi. Geodezik chiziq tushunchasi intuitiv jihatdan fazoda erkin harakat qilayotgan zarra trayektoriyasini bildiradi. Ya'ni, agar jismga tashqi kuchlar ta'sir qilmasa, u aynan geodezik chiziq bo'ylab harakat qiladi. Bu tushuncha nafaqat matematikada, balki fizikada ham muhim ahamiyatga ega bo'lib, ayniqsa fazo-vaqt geometriyasini tushuntirishda asosiy vositalardan biri hisoblanadi. Geodezik tenglamalar esa ushbu chiziqlarni aniqlovchi asosiy matematik apparat bo'lib, ular differensial tenglamalar yordamida ifodalanadi. Ushbu tenglamalar metrik tensor va Kristoffel belgilar orqali yoziladi hamda fazoning geometrik tuzilishiga bog'liq holda turlicha ko'rinishga ega bo'ladi. Tekislikda geodeziklar oddiy to'g'ri chiziqlardan iborat bo'lsa, egri sirtlarda ular murakkab shaklga ega bo'ladi.

Differensial geometriyada eng muhim tushunchalardan biri bu — geodezik chiziqlardir. Geodeziklar fazoda yoki sirt ustida ikki nuqta orasidagi eng qisqa yoki eng “to'g'ri” yo'lni ifodalovchi egri chiziqlardir. Bu tushuncha Evklid geometriyasidagi to'g'ri chiziq tushunchasining umumlashgan ko'rinishi hisoblanadi. Agar tekislikda eng qisqa yo'l to'g'ri chiziq bo'lsa, egri sirtlarda bu rolni geodeziklar bajaradi. Geodezik chiziqni matematik jihatdan aniqlash uchun egri chiziq uzunligi funksionali ishlatiladi. Agar sirt ustida $\gamma(t)$ egri chiziq berilgan bo'lsa, uning uzunligi quyidagicha aniqlanadi:

$$L = \int \sqrt{(g_{ij} (dx^i/dt)(dx^j/dt))} dt$$

Geodezik chiziq shu funksionalni minimallashtiruvchi egri chiziqdir. Ya'ni, geodeziklar — bu uzunlik funksionalining ekstremumini (odatda minimumini) beruvchi chiziqlardir. Shu sababli ular “lokal minimal yo'l” sifatida ta'riflanadi.

Bu ta'rif variatsion hisobga asoslanadi. Agar L funksional uchun variatsiya nolga teng bo'lsa:

$$\delta L = 0$$

unda Euler–Lagrange tenglamalaridan geodezik tenglama hosil bo'ladi:

$$d^2x^k/dt^2 + \Gamma^k_{ij} (dx^i/dt)(dx^j/dt) = 0$$

bu yerda Γ^k_{ij} — Kristoffel belgilar bo'lib, ular fazoning metrikasiga bog'liq.

Geodeziklarning eng muhim xususiyati shundaki, ular lokal minimal yo'lni ifodalaydi, lekin har doim global minimal bo'lmasligi mumkin. Masalan, sferada ikkita nuqta orasidagi bir nechta geodeziklar bo'lishi mumkin, lekin ulardan faqat



bittasi eng qisqa bo'ladi.

Geodeziklarni tushunish uchun tekislik va egri sirtlardagi holatlarni alohida ko'rib chiqamiz.

Tekislikda geodeziklar juda sodda ko'rinishga ega. Evklid tekisligida metrika quyidagicha yoziladi:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Bu holda geodezik tenglama quyidagicha bo'ladi:

$$d^2x/dt^2 = 0, d^2y/dt^2 = 0$$

Bu tenglamalarni yechsak:

$$x(t) = at + b, y(t) = ct + d$$

Bu esa to'g'ri chiziq tenglamasi ekanligini ko'rsatadi. Demak, tekislikda geodeziklar — to'g'ri chiziqlardir.

Endi egri sirtga misol sifatida sferani qaraymiz. Sfera parametrik ko'rinishda:

$$r(u, v) = (R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R \cos u)$$

Bu sirtning metrikasi:

$$ds^2 = R^2 du^2 + R^2 \sin^2 u dv^2$$

Bu metrika orqali geodezik tenglamalar chiqariladi va natijada sferadagi geodeziklar katta doiralar ekanligi aniqlanadi. Masalan, Yer sharida ekvator yoki meridianlar geodezik chiziqlar hisoblanadi.

Differensial geometriyada geodezik chiziqlarni aniqlashning eng muhim usullaridan biri — bu variatsion hisob usulidir. Bu usulga ko'ra, geodezik chiziqlar egri chiziqlar orasida uzunlik funksionalini minimallashtiruvchi chiziqlar sifatida aniqlanadi. Ya'ni, geodeziklar — bu ikki nuqta orasidagi eng qisqa yo'lni beruvchi egri chiziqlardir.

Avvalo, uzunlik funksionali tushunchasini qaraymiz. Agar fazoda yoki sirt ustida parametrik egri chiziq $\gamma(t)$ berilgan bo'lsa, uning uzunligi quyidagicha aniqlanadi:

$$L = \int \sqrt{(g_{ij} (dx^i/dt)(dx^j/dt))} dt$$

bu yerda g_{ij} — metrik tensor elementlari bo'lib, ular fazoning geometrik xossalarini ifodalaydi. Bu integral uzunlik funksionali deb ataladi.

Geodezik chiziqni topish uchun ushbu funksionalni minimallashtirish kerak, ya'ni:

$$\delta L = 0$$

Bu shart variatsion hisobning asosiy sharti hisoblanadi. Buni amalga oshirish uchun



Euler–Lagrange tenglamalaridan foydalaniladi.
Uzunlik funksionalini quyidagicha yozamiz:

$$L = \int F(x^i, x^{i'}) dt$$

bu yerda:

$$F = \sqrt{(g_{ij} x^{i'} x^{j'})}$$

Endi Euler–Lagrange tenglamasi qo‘llaniladi:

$$d/dt (\partial F/\partial x^{k'}) - \partial F/\partial x^k = 0$$

Bu tenglamani hisoblab chiqish natijasida geodezik tenglama hosil bo‘ladi. Hisoblash natijasida quyidagi tenglama kelib chiqadi:

$$d^2 x^k/dt^2 + \Gamma^k_{ij} (dx^i/dt)(dx^j/dt) = 0$$

bu yerda Γ^k_{ij} — Kristoffel belgilar bo‘lib, ular quyidagicha aniqlanadi:

$$\Gamma^k_{ij} = (1/2) g^{kl} (\partial g_j^l/\partial x^i + \partial g_i^l/\partial x^j - \partial g_{ij}/\partial x^l)$$

Bu tenglama geodezik tenglama deb ataladi va u fazodagi eng qisqa yo‘llarni aniqlaydi.

Geodezik tenglamaning muhim xususiyati shundaki, u ikkinchi tartibli differensial tenglama bo‘lib, uning yechimi boshlang‘ich shartlarga bog‘liq holda aniqlanadi.

Agar boshlang‘ich nuqta va yo‘nalish berilgan bo‘lsa, geodezik chiziq yagona aniqlanadi.

Xulosa qilib aytganda ushbu maqolada Riman fazolarida geodezik chiziqlarni tavsiflovchi differensial tenglamalarning matematik va fizik mohiyati tahlil qilindi. Olingan natijalar shuni ko‘rsatadiki, geodezik tenglamalar nafaqat geometrik masofani qisqartirish, balki murakkab fizik maydonlardagi zarralar harakatini modellashtirishda ham fundamental ahamiyatga ega. Variatsion hisob usullari orqali ishlab chiqilgan algoritmlar navigatsiya, robototexnika va astrofizika kabi sohalarda amaliy muammolarni yechish uchun keng imkoniyatlar yaratadi. Xulosa o‘rnida, geodeziklar nazariyasi zamonaviy differensial geometriya va nazariy fizikaning o‘zaro uyg‘unligini ta‘minlovchi eng dolzarb ilmiy yo‘nalishlardan biri bo‘lib qolmoqda.



Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati:

- 1.Narmanov, A. N. (2008).** Differensial geometriya asoslari. – Toshkent: O'qituvchi nashriyoti.
- 2.Sharipov R.** Differensial geometriya va tenzor tahlili asoslari. – Toshkent: Universitet nashriyoti, 2016
- 3.Rashidov A., Jo'rayev T. Geometriya va topologiya elementlari.** – Toshkent: O'qituvchi, 2018.
- 4.Manfredo P. do Carmo.** Differential Geometry of Curves and Surfaces. – Prentice-Hall, 1976.
- 5.Barrett O'Neill.** Elementary Differential Geometry. – Academic Press, 2006.
- 6.Luther Pfahler Eisenhart.** Riemannian Geometry. – Princeton University Press, 1997.
- 7.John M. Lee. Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature.** – Springer, 1997.
- 8.Michael Spivak.** A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. – Publish or Perish, 1999.