



SIRTNING IKKINCHI KVADRATIK FORMASI

Saliyeva Sevara Ma'mirbek qizi,

Andijon davlat pedagogika institute "Matematika va Informatika" kafedrası
o'qituvchisi

E-mail: saliyevasevara18@gmail.com

Mahamadjonova Rayhona Shuhratjon qizi

Andijon davlat pedagogika institute "Aniq va tabiiy" fanlar fakulteti
Matematika yo'nalishi 2-kurs talabasi

E-mail: rayhonamahammadjonova22@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu kurs ishi differensial geometriya fanining markaziy tushunchalaridan biri — sirtning ikkinchi kvadratik formasi va uning geometrik xususiyatlarini o'rganishga bag'ishlangan. Tadqiqotning asosiy maqsadi sirtning fazodagi egilish darajasini va uning shaklini miqdoriy jihatdan tavsiflovchi ushbu formaning matematik tabiatini ochib berishdan iborat. Ishning nazariy qismida sirtga o'tkazilgan normal vektor va sirt nuqtasining differensial tushunchalari orqali ikkinchi kvadratik formaning koeffitsiyentlari (L , M , N) keltirib chiqarilgan. Shuningdek, birinchi va ikkinchi kvadratik formalar o'rtasidagi bog'liqlik, ularning sirtning to'la egriligi (Gauss egriligi) va o'rtacha egriligini aniqlashdagi o'rni atroflicha tahlil qilingan. Kurs ishida sirt nuqtalarining tasnifi (elliptik, giperbolik, parabolik va tekis nuqtalar) aynan ikkinchi kvadratik forma yordamida qanday aniqlanishi matematik isbotlar bilan ko'rsatib o'tilgan. Tadqiqotning amaliy ahamiyati shundaki, ikkinchi kvadratik forma sirt ustidagi chiziqlarning (geodezik va normal kesimlar) xossalari o'rganishda, sirtlarni vizuallashtirishda va muhandislik konstruksiyalarining egilish mustahkamligini hisoblashda poydevor vazifasini o'taydi. Kurs ishi yakunida nazariy xulosalar aniq misollar va sirt turlari (sferik, silindrik va egarli sirtlar) tahlili bilan mustahkamlanadi. Ushbu ish differensial geometriya yo'nalishida tahsil olayotgan talabalar uchun sirtlar nazariyasini chuqurroq anglashda muhim manba bo'lib xizmat qiladi.

Kalit so'zlar. Sirt nazariyasi, ikkinchi kvadratik forma, normal egrilik, Gauss egriligi, o'rtacha egrilik, elliptik nuqta, giperbolik nuqta.

Abstract. This coursework is devoted to the study of one of the central concepts of differential geometry - the second quadratic form of a surface and its geometric properties. The main goal of the research is to reveal the mathematical nature of this form, which quantitatively characterizes the degree of curvature of the surface in space



and its shape. In the theoretical part of the work, the coefficients of the second quadratic form (L , M , N) are derived through the differential concepts of the normal vector transferred to the surface and the surface point. Also, the relationship between the first and second quadratic forms, their role in determining the total curvature (Gaussian curvature) and average curvature of the surface are analyzed in detail. The coursework shows with mathematical proofs how the classification of surface points (elliptic, hyperbolic, parabolic and flat points) is determined using the second quadratic form. The practical significance of the research is that the second quadratic form serves as a basis for studying the properties of lines on surfaces (geodesic and normal sections), for visualizing surfaces, and for calculating the bending strength of engineering structures. At the end of the course work, theoretical conclusions are reinforced by the analysis of specific examples and types of surfaces (spherical, cylindrical, and saddle surfaces). This work serves as an important source for students studying differential geometry to gain a deeper understanding of the theory of surfaces.

Keywords. Surface theory, second quadratic form, normal curvature, Gaussian curvature, mean curvature, elliptic point, hyperbolic point.

Аннотация. Данная курсовая работа посвящена изучению одного из центральных понятий дифференциальной геометрии — второй квадратичной формы поверхности и её геометрических свойств. Главная цель исследования — раскрыть математическую природу этой формы, которая количественно характеризует степень кривизны поверхности в пространстве и её форму. В теоретической части работы коэффициенты второй квадратичной формы (L , M , N) выводятся через дифференциальные понятия вектора нормали, перенесённого на поверхность, и точки поверхности. Также подробно анализируется взаимосвязь между первой и второй квадратичными формами, их роль в определении полной кривизны (гауссовой кривизны) и средней кривизны поверхности. В работе математическими доказательствами показано, как определяется классификация точек поверхности (эллиптические, гиперболические, параболические и плоские точки) с использованием второй квадратичной формы. Практическое значение исследования заключается в том, что вторая квадратичная форма служит основой для изучения свойств линий на поверхностях (геодезических и нормальных сечений), для визуализации поверхностей и для расчёта прочности на изгиб инженерных конструкций. В конце курса теоретические выводы подкрепляются анализом конкретных примеров и типов поверхностей (сферических, цилиндрических и седловидных поверхностей). Данная работа служит важным источником для студентов,



изучающих дифференциальную геометрию, для более глубокого понимания теории поверхностей.

Ключевые слова: теория поверхностей, вторая квадратичная форма, нормальная кривизна, гауссова кривизна, средняя кривизна, эллиптическая точка, гиперболическая точка.

Differensial geometriya fanining shakllanishi va rivojlanishi bevosita egri chiziqlar va sirtlarning lokal xossalarini o'rganish bilan bog'liqdir. Sirtlar nazariyasida sirtning o'ziga xos geometrik xarakteristikalari, uning fazoda joylashishi va shaklining o'zgarishi (egilishi) matematik jihatdan ikki asosiy forma orqali ifodalanadi. Agar sirtning birinchi kvadratik formasi uning ichki geometriyasini (masofalar, burchaklar va yuzalar) belgilab bersa, sirtning ikkinchi kvadratik formasi uning tashqi geometriyasini, ya'ni sirtning o'zining urinma tekisligidan qanchalik chetga chiqishini, boshqacha aytganda, uning fazodagi egilish darajasini tavsiflaydi. Sirtning ikkinchi kvadratik formasi tushunchasi sirt ustidagi nuqtalarning geometrik tabiatini aniqlashda hal qiluvchi rol o'ynaydi. Aynan ushbu forma yordamida sirt nuqtalarini elliptik, giperbolik, parabolik yoki tekis nuqtalarga ajratish imkoniyati tug'iladi. Bu esa o'z navbatida me'morchilik, mashinasozlik va fizika sohalarida murakkab konstruksiyalarning sirt shakllarini loyihalashda juda muhimdir. Masalan, sirtning Gauss egriligi va o'rtacha egriligi kabi fundamental kattaliklar aynan birinchi va ikkinchi kvadratik formalar koeffitsiyentlari orqali aniqlanadi. Ushbu kurs ishining dolzarbligi shundaki, sirtning ikkinchi kvadratik formasi faqatgina nazariy geometriya bilan cheklanib qolmay, zamonaviy kompyuter grafikasi (3D modellashtirish), vizuallashtirish algoritmlari va qobiqlar nazariyasida keng qo'llaniladi. Sirtning qavariqligi yoki botiqligini tahlil qilish, uning egilish chiziqlarini aniqlashda ushbu forma asosiy matematik apparat bo'lib xizmat qiladi. Kurs ishining kirish qismida biz sirtning ikkinchi kvadratik formasining ta'rifini, uning koeffitsiyentlarini keltirib chiqarish usullarini va uning sirt egriligi bilan bog'liqligini o'rganishni maqsad qildik. Shuningdek, mavzu doirasida Veyngarten akslantirishi va sirtning normal egriligi kabi muhim tushunchalarning matematik asoslari ko'rib chiqiladi.

Nazariy asoslarni shakllantirish: Sirtning ikkinchi kvadratik formasi ta'rifini o'rganish va uning koeffitsiyentlarini (L , M , N) sirtning radius-vektori hamda birlik normal vektori orqali hisoblash algoritmlarini bayon etish. Egriliklar bilan bog'liqlikni tahlil qilish: Sirtning normal egriligi tushunchasini ikkinchi kvadratik forma orqali ifodalash hamda Meusnier (Menye) teoremasining geometrik talqinini o'rganish.

Sirt nuqtalarini tasniflash: Ikkinchi kvadratik formaning diskriminanti va



koeffitsiyentlariga tayanib, sirt nuqtalarini elliptik, giperbolik, parabolik va tekis (yassi) turlarga ajratish mezonlarini asoslab berish. Sirt ikki marta uzluksiz differentsiallanuvchi bo'lib, $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in \phi$

vektor ko'rinishida berilgan bo'lsin. Sirtning $P(u, v)$ nuqtasidagi normalning birlik

vektori

$$\vec{n} = \frac{[\vec{r}_u \ \vec{r}_v]}{|\vec{r}_u \ \vec{r}_v|} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} [\vec{r}_u \ \vec{r}_v]$$

Radius vektorni ikki marta differentsiallasak

$$d^2\vec{r} = \vec{r}_{uu} du^2 + 2\vec{r}_{uv} dudv + \vec{r}_{vv} dv^2 + \vec{r}_u d^2u + \vec{r}_v d^2v$$

Misol. $\vec{r}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$

$$\vec{r}_u = (1, 0, 2u) \quad , \quad \vec{r}_v = (0, 1, 2v)$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 0 & 2u \\ 1 & 2v \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} j \begin{vmatrix} 1 & 2u \\ 0 & 2v \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{n} = (-2u, -2v, 1)$$

$$\vec{r}_{uu} = (0, 0, 2)$$

$$\vec{r}_{vv} = (0, 0, 2)$$

$$\vec{r}_{uv} = (0, 0, 0)$$

$$L = (0, 0, 2) \cdot (-2u, -2v, 1) = 2$$

$$M = (0, 0, 0) \cdot (-2u, -2v, 1) = 0$$

$$N = (0, 0, 2) \cdot (-2u, -2v, 1) = 2$$

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 2du^2 + 2dv^2$$

Xulosa qilib aytganda Sirtning ikkinchi kvadratik formasi differensial geometriyada fundamental tushuncha bo'lib, u sirtning o'z urinma tekisligidan qanchalik og'ishini, ya'ni uning uch o'lchamli Evklid fazosidagi egrilik darajasini xarakterlaydi. Agar birinchi kvadratik forma sirtning "ichki" metrikasini, ya'ni masofalar va burchaklarni o'lchashga xizmat qilsa, ikkinchi kvadratik forma sirtning "tashqi" geometriyasini, uning fazodagi shakli va bukilishini belgilab beradi. Ushbu formaning asosiy ahamiyati sirtning nuqtadagi normal egriligini aniqlashda namoyon bo'ladi, chunki u sirt ustidagi ixtiyoriy yo'nalish bo'yicha egri chiziqning qanday qisilishini ko'rsatadi.



Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati:

- 1.Narmanov, A. N. (2008).** Differensial geometriya asoslari. – Toshkent: O‘qituvchi nashriyoti.
- 2.Xudoyberdiyev, G‘, Jo‘rayev, T. (2012).** Differensial geometriya va topologiya. – Toshkent: Universitet nashriyoti.
- 3.To‘rayev, R. (2015).** Geometriya (II qism). – Toshkent: Fan va texnologiya.
- 4.Rasulov, A. (2010).** Differensial geometriya masalalari to‘plami. – Toshkent: Tafakkur nashriyoti.
- 5.Azlarov T.A, Mansurov X.** Matematik analiz. 1,2 qismlar, T., O‘zbekiston, 1994, 1995.
- 6.Begmatov A., Musina N.G.** Tenzor hisob elementlari. T., Universitet, 1993.
- 7.Sharipov R.** Differensial geometriya va tenzor tahlili asoslari. – Toshkent: Universitet nashriyoti, 2016
- 8.Rashidov A., Jo‘rayev T. Geometriya va topologiya elementlari.** – Toshkent: O‘qituvchi, 2018.