



MARKAZIY LIMIT TEOREMAGA OID BA'ZI NATIJALAR

Janikul Abdullayev

F.-m.f.d, Sharof Rashidov nomidagi

Samarqand davlat universiteti

Suhrob Turayev

Sharof Rashidov nomidagi Samarqand

davlat universiteti magistranti

Annatatsiya: Markaziy limit teoremlar asosan bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar uchun bayon qilingan [1-2]. Bu ishda biz bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar uchun markaziy limit teoreмага oid ba'zi natijalarni keltiramiz. Quyida keltirilgan misollarning ko'pchiligi [3] – o'quv qo'llanmadan tanlab olingan.

Kalit so'zlar: Hodisalarning bog'liqsizligi, Markaziy limit teorema, Bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar, Bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar uchun markaziy limit teorema.

Hodisalarning bog'liqsizligi. Hodisalarning bog'liqsizligi ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi. O'z navbatida bog'liqsiz hodisalar ehtimollar nazariyasini o'lchovli fazolarning umumiy nazariyasidan ajratib turadigan o'ziga xos xususiyatini aniqlab beradi.

Bizga $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimollar fazosida A va B hodisalar berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$ bo'lsa, u holda A va B hodisalar bog'liqsiz deyiladi.

2-ta'rif. Bizga $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalar berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n, (2 \leq k \leq n)$; sonlar uchun



$$P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \dots \cdot A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalar birgalikda bog'liqsiz deyiladi.

Hodisalarning juft-jufti bilan bog'liqsizligidan birgalikda bog'liqsizligi kelib chiqmaydi. Bunga quyidagi misolda ishonch hosil qilishimiz mumkin.

1-misol. Tajriba simmetrik tangani ikki marta tashlashdan iborat bo'lsin. U holda elementar hodisalar fazosi $\Omega = \{gg, gr, rg, rr\}$ bo'ladi. $A = \{gg, gr\}$, $B = \{gg, rg\}$ va $C = \{gg, rr\}$ hodisalarni juft-jufti bilan hamda birgalikda bog'liqsizlikka tekshiring.

Yechish. Hodisa ehtimolining klassik ta'rifiga ko'ra elementar hodisalar bir xil ehtimolga ega bo'ladi, shuning uchun

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Bu hodisalar juft-jufti bilan ko'paytmasi $A \cdot B = B \cdot C = A \cdot C = \{gg\}$ bo'lib, ularning ehtimollari

$$P(A \cdot B) = P(A \cdot C) = P(B \cdot C) = \frac{1}{4}.$$

Bundan A, B , va C hodisalarning juft-jufti bilan bog'liqsizligi kelib chiqadi. Bu hodisalar ko'paytmasi $A \cdot B \cdot C = \{gg\}$ bo'lib, uning ehtimoli

$$P(A \cdot B \cdot C) = \frac{1}{4}.$$

Ammo $P(A \cdot B \cdot C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$, ya'ni A, B va C hodisalar juft-jufti bilan bog'liqsiz, lekin ular birgalikda bog'liqsiz emas.

2-misol. $\Omega = [0; 1)$ elementar hodisalar fazosi. σ — algebrasi sifatida Ω dagi barcha Borel to'plamlari sinfi $\mathcal{B}(\Omega)$ ni qaraymiz, ehtimol o'lchovi P sifatida $P(A) = \mu(A)$ ni olamiz. Bu yerda $\mu(A)$ bilan A to'plamning Lebeg o'lchovi belgilangan. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimolliklar fazosida

$$A_1 = \left[0; \frac{1}{2}\right), \quad A_2 = \left[0; \frac{1}{4}\right) \cup \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right), \quad A_3 = \left[0; \frac{1}{8}\right) \cup \left[\frac{1}{4}; \frac{3}{8}\right) \cup \left[\frac{1}{2}; \frac{5}{8}\right) \cup \left[\frac{3}{4}; \frac{7}{8}\right), \quad \dots$$

ya'ni



$$A_n = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} \left[\frac{2k-2}{2^n}; \frac{2k-1}{2^n} \right), \quad n \in \mathbb{N}$$

hodisalarni qaraymiz. A_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) hodislarni bog'liqsizlikka tekshiring.

Yechish. Dastlab A_1 va A_2 hodisalarning bog'liqsizligini tekshiramiz. Murakkab bo'lmagan hisoblashlar shuni ko'rsatadiki

$$P(A_1) = \frac{1}{2}, \quad P(A_2) = \frac{1}{2}, \quad P(A_3) = \frac{1}{2}, \dots, \quad P(A_n) = \frac{1}{2}.$$

A_1 va A_2 hodisalar ko'paytmasi $A_1 \cdot A_2 = \left[0; \frac{1}{4}\right)$. Shunday ekan

$$P(A_1 \cdot A_2) = \frac{1}{4} = P(A_1) \cdot P(A_2).$$

Bu tenglikdan A_1 va A_2 hodisalarning bog'liqsizligi kelib chiqadi. Endi A_1, A_2, A_3 hodisalarning bog'liqsizligini ko'raylik. Bu yerdan A_1, A_2, A_3 hodisalarning juft-jufti bilan bog'liqsizligini $P(A_1), P(A_2), P(A_3)$ va $P(A_1 \cdot A_2), P(A_1 \cdot A_3), P(A_2 \cdot A_3)$ larni topish orqali bevosita tekshirib ko'rishimiz mumkin. Endi $A_1 \cdot A_2, A_1 \cdot A_3$, va $A_2 \cdot A_3$ hodisalarni topamiz.

$$A_1 \cdot A_2 = \left[0; \frac{1}{4}\right), \quad A_1 \cdot A_3 = \left[0; \frac{1}{8}\right) \cup \left[\frac{1}{4}; \frac{3}{8}\right), \quad A_2 \cdot A_3 = \left[0; \frac{1}{8}\right) \cup \left[\frac{1}{2}; \frac{5}{8}\right).$$

Bu yerdan A_1, A_2, A_3 hodisalarning juft-jufti bilan bog'liqsizligini ko'rishimiz mumkin.

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{1}{4},$$

$$P(A_2 \cdot A_3) = P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{1}{4},$$

$$P(A_1 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_3) = \frac{1}{4}.$$

Endi $P(A_1, A_2, A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$ tenglikni tekshirib ko'ramiz. Agar biz

$$A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 = \left[0; \frac{1}{8}\right)$$

tenglikni inobatga olsak, u holda



$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = \frac{1}{8} = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$$

ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Bundan A_1, A_2, A_3 hodisalarning birgalikda bog'liqsizligi kelib chiqadi. Barcha $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ hodislarning bog'liqsizligini matematik induksiya metodi yordamida keltirishimiz mumkin.

Tasodifiy miqdorlar. Tasodifiy miqdorlar tasodifga bog'liq holda u yoki bu qiymatlarni qabul qiluvchi miqdorlardir.

3-ta'rif. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ - ehtimolliklar fazosi va $\xi = \xi(\omega) - \Omega$ da aniqlangan sonli funksiya bo'lsin. Agar ixtiyoriy $x \in \mathbb{R}$ uchun

$$\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$$

bo'lsa, u holda ξ funksiyaga tasodifiy miqdor deyiladi.

Uning taqsimot funksiyasi deb sonlar o'qi $\mathbb{R}$ da aniqlangan $F(x) = P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \leq x\})$ funksiyaga aytiladi.

4-ta'rif. Bizga $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdorlar berilgan bo'lsin. U holda $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega))$ ga tasodifiy vektor yoki n -o'lchovli tasodifiy miqdor deyiladi.

5-ta'rif. $\mathbb{R}^n$ da aniqlangan ushbu

$$F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\{\omega: \xi_1(\omega) \leq x_1, \xi_2(\omega) \leq x_2, \dots, \xi_n(\omega) \leq x_n\})$$

n - o'lchovli funksiya $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ tasodifiy vektorning taqsimot funksiyasi yoki $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdorlarning birgalikdagi taqsimot funksiyasi deyiladi.

Tasodifiy miqdorlarning bog'liqsizligi. Tasodifiy miqdorlarning bog'liqsizlik tushunchasi ehtimollar nazariyasidagi eng muhim tushunchalardan biri bo'lib, u hodisalarning bog'liqsizligini tasodifiy miqdorlarga ko'chirishdan iborat.

6-ta'rif. Bizga ξ va η tasodifiy miqdorlar berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy B va C Borel to'plamlari uchun

$$P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \in B, \eta(\omega) \in C\}) = P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \in B\}) \cdot P(\{\omega \in \Omega: \eta(\omega) \in C\})$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda ξ va η tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz deyiladi.



7-ta'rif. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - tasodifiy miqdorlar berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ($k = 1, 2, \dots, n$) Borel to'plamlari uchun

$$\begin{aligned} P(\{\omega \in \Omega: \xi_1(\omega) \in B_1, \xi_2(\omega) \in B_2, \dots, \xi_n(\omega) \in B_n\}) = \\ P(\{\omega \in \Omega: \xi_1(\omega) \in B_1\}) \cdot P(\{\omega \in \Omega: \xi_2(\omega) \in B_2\}) \cdot \dots \\ \cdot P(\{\omega \in \Omega: \xi_n(\omega) \in B_n\}) \quad (1) \end{aligned}$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ larga bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar deyiladi.

Xususan $B_k = (-\infty, x_k]$ Borel to'plamlari uchun (1) tenglik quyidagi ko'rinishni oladi:

$$F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{\xi_n}(x_n). \quad (2)$$

Agar istalgan $x_1, x_2, \dots, x_n$ lar uchun (2) tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'ladi.

3-misol. Elementar hodisalar fazosi simmetrik tangani ikki marta tashlashdan iborat bo'lsin, u holda $\Omega = \{gg, gr, rg, rr\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ bo'ladi. $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B = \{\omega_2, \omega_3\}$ hodisalar bo'lsin. ξ va η tasodifiy miqdorlarni quyidagicha aniqlaymiz.

$$\begin{aligned} \xi(\omega) &= I_A(\omega) - I_{\bar{A}}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ -1, & \omega \in \bar{A}, \end{cases} \\ \eta(\omega) &= 2 \cdot (I_B(\omega) - I_{\bar{B}}(\omega)) = \begin{cases} 2, & \omega \in B, \\ -2, & \omega \in \bar{B}, \end{cases} \end{aligned}$$

ξ va η tasodifiy miqdorlarni bog'liqsizlikka tekshiring.

Yechish. ξ tasodifiy miqdor $x_1 = -1$ va $x_2 = 1$ qiymatlarni, η tasodifiy miqdor $y_1 = -2$ va $y_2 = 2$ qiymatlarni bir xil $\frac{1}{2}$ ehtimollik bilan qabul qiladi, ya'ni

$$P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = -1\}) = P(\bar{A}) = \frac{1}{2}, \quad P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = 1\}) = P(A) = \frac{1}{2}, \quad (3)$$

$$P(\{\omega \in \Omega: \eta(\omega) = -2\}) = P(\bar{B}) = \frac{1}{2},$$

$$P(\{\omega \in \Omega: \eta(\omega) = 2\}) = P(B) = \frac{1}{2}. \quad (4)$$

ξ va η diskret tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lishi uchun, barcha x_i va y_j larda



$$P(\{\omega: \xi(\omega) = x_i, \eta(\omega) = y_j\}) = P(\{\omega: \xi(\omega) = x_i\}) \cdot P(\{\omega: \eta(\omega) = y_j\})$$

tenglikning bajarilishi zarur va yetarli. Tushunarli bo'lishi uchun

$$P(\{\omega: \xi(\omega) = -1, \eta(\omega) = -2\}) = P(\{\omega: \xi(\omega) = -1\}) \cdot P(\{\omega: \eta(\omega) = -2\})$$

tenglikning bajarilishini tekshiramiz:

$$P(\{\omega: \xi(\omega) = -1, \eta(\omega) = -2\}) = P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = P(\{\omega_4\}) = \frac{1}{4}, \quad (5)$$

Xuddi shunday

$$P(\{\omega: \xi(\omega) = -1, \eta(\omega) = 2\}) = P(\overline{A} \cdot B) = P(\{\omega_3\}) = \frac{1}{4},$$

$$P(\{\omega: \xi(\omega) = 1, \eta(\omega) = -2\}) = P(A \cdot \overline{B}) = P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{4}, \quad (6)$$

$$P(\{\omega: \xi(\omega) = 1, \eta(\omega) = 2\}) = P(A \cdot B) = P(\{\omega_2\}) = \frac{1}{4}.$$

(3), (4) va (5) dan

$$P(\{\omega: \xi(\omega) = -1, \eta(\omega) = -2\}) = P(\xi = -1) \cdot P(\eta = -2)$$

tenglik kelib chiqadi. Qolgan uch tenglik

$$P(\{\omega: \xi(\omega) = x_i, \eta(\omega) = y_j\}) = P(\{\omega: \xi(\omega) = x_i\}) \cdot P(\{\omega: \eta(\omega) = y_j\})$$

(3), (4) va (6) tengliklardan kelib chiqadi. Demak, ξ va η tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz ekan.

4-misol. $\Omega = [0; 1) \times [0; 1)$ elementar hodisalar fazosi. σ -algebra sifatida Ω dagi Borel to'plamlari sinfi $\mathcal{B}(\Omega)$ ni qaraymiz, ehtimol o'lchovi P sifatida $P(A) = \mu(A)$ ni olamiz.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimolliklar fazosida

$$\xi(\omega) = \xi(\omega_1, \omega_2) = \omega_1$$

va

$$\eta(\omega) = I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

tasodifiy miqdorlarni qaraymiz. Bu yerda

$$A = [0; 1) \times \left[\frac{1}{2}; 1\right).$$



ξ va η tasodifiy miqdorlarni bog'liqsizlikka tekshiring. Shuni ta'kidlaymizki ξ – absolyut uzluksiz tasodifiy miqdor, η esa diskret tasodifiy miqdor.

Yechish. Tasodifiy vektor $\zeta = (\xi, \eta)$ ning taqsimot funksiyasini topamiz: Ixtiyoriy $x, y \in \mathbb{R}$ uchun $\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \leq x, \eta(\omega) \leq y\}$ hodisani topib olamiz.

$$\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \leq x, \eta(\omega) \leq y\} = \begin{cases} \emptyset, & x < 0 \text{ yoki } y < 0, \\ [0; x) \times [0; \frac{1}{2}), & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1, \\ [0; x) \times [0; 1), & 0 \leq x < 1, y \geq 1, \\ \bar{A}, & x \geq 1, 0 \leq y < 1, \\ \Omega, & x \geq 1, y \geq 1. \end{cases}$$

Oxirgi tenglikning ikkala tomonidan ehtimol olib, ξ va η tasodifiy miqdorlarning birgalikdagi taqsimot funksiyasi $F_{\xi, \eta}(x, y)$ ni olamiz:

$$F_{\xi, \eta}(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ yoki } y < 0, \\ \frac{1}{2}x, & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1, \\ x, & 0 \leq x < 1, y \geq 1, \\ \frac{1}{2}, & x \geq 1, 0 \leq y < 1, \\ 1, & x \geq 1, y \geq 1. \end{cases}$$

Endi ξ va η tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyalarini topamiz.

$$F_{\xi}(x) = P(\{\omega: \omega_1 \leq x\}) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$F_{\eta}(x) = P(\{\omega: I_A(\omega) \leq y\}) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq y < 1 \\ 1, & y \geq 1. \end{cases}$$

Bevosita tekshirib ko'rishimiz mumkinki, ξ va η tasodifiy miqdorlarning birgalikdagi taqsimot funksiyasi $F_{\xi, \eta}(x, y)$, ularning har birining taqsimot funksiyalari $F_{\xi}(x)$ va $F_{\eta}(y)$ ko'paytmasiga teng. Demak, ξ va η tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz ekan.



8-ta'rif. Agar ixtiyoriy n va $1 \leq i_1 < \dots < i_n < \infty$ sonlar uchun $\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_n}$ tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lsa, u holda $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bog'liqsiz deyiladi.

5-misol. 2-misolda keltirilgan A_n hodisa indikatorini ξ_n orqali belgilaymiz, ya'ni $\xi_n(\omega) = I_{A_n}(\omega), n \in \mathbb{N}$ bo'lsin. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ tasodifiy miqdorlarni bog'liqsizlikka tekshiring.

Yechish. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ tasodifiy miqdorlar bog'liqsizligi $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ hodisalarning bog'liqsizligidan kelib chiqadi. Qo'shimcha qilib shuni aytishimiz mumkinki $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bir xil taqsimlangan.

$\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tasodifiy miqdor berilgan bo'lib, $\int_{\Omega} |\xi(\omega)| dP(\omega)$ integral mavjud bo'lsin.

9-ta'rif. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimollar fazosida aniqlangan $\xi = \xi(\omega)$ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi deb, $M\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega) dP(\omega)$ songa aytiladi.

10-ta'rif. ξ tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasi deb ushbu $Me^{it\xi}$ matematik kutilmaga aytiladi, ya'ni

$$f_{\xi}(t) = Me^{it\xi} = \int_{\Omega} e^{it\xi} dP(\omega).$$

1-teorema (teskari limit teorema). $f_n(t)$ - xarakteristik funksiyalar ketma-ketligi 0 da uzluksiz $f(t)$ funksiyaga nuqtaviy yaqinlashsin. U holda mos taqsimot funksiyalar ketma-ketligi $F(x)$ taqsimot funksiyaga sust yaqinlashadi va $f(t)$ funksiya $F(x)$ taqsimot funksiyaga mos kelgan xarakteristik funksiya bo'ladi.

11-ta'rif Bizga $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimolliklar fazosi va unda aniqlangan $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $x \in \mathbb{R}$ uchun ushbu

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega: \frac{\sum_{k=1}^n (\xi_k(\omega) - M\xi_k)}{\sqrt{D(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)}} \leq x\right\}\right)_{n \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi markaziy limit teoremani qanoatlantiradi deyiladi.



6-misol. 2-misolda keltirilgan A_n hodisa indikatorini ξ_n orqali belgilaymiz, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini markaziy limit teoremani qanoatlantirishini tekshiring.

Yechish. ξ_n tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni

ξ_n	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

1-jadval

ξ_n tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasini hisoblaymiz.

$$M\xi_n = 0 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,5 = 0,5, \quad D\xi_n = M(\xi - M\xi)^2 = 0,25.$$

ξ_n tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasi topamiz.

$$\begin{aligned} f_{\xi_n}(t) &= Me^{it\xi} = \int_{\Omega} e^{itA_n} dP(\omega) \\ &= \int_{\Omega} e^{itA_n} dP(\omega) + \int_{\Omega} e^{itA_n} dP(\omega) = \frac{1}{2} \cdot (1 + e^{it}). \quad (7) \end{aligned}$$

Endi markazlashgan va normallashtgan

$$S_n(\omega) = \frac{\xi_1(\omega) + \xi_2(\omega) + \dots + \xi_n(\omega) - M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)}{\sqrt{D(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)}}$$

tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini quramiz. $S_n(\omega)$ ni quyidagicha ifodalab olamiz.

$$S_n(\omega) = \frac{\xi_1(\omega) + \xi_2(\omega) + \dots + \xi_n(\omega) - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} = \sum_{k=1}^n \frac{2\xi_k - 1}{\sqrt{n}} \quad (8)$$

$\bar{\xi}_k = \frac{2\xi_k - 1}{\sqrt{n}}$ belgilash olib $\bar{\xi}_k$ tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasini topamiz.

Xarakteristik funksiyaning $f_{a\xi+b}(t) = e^{itb} \cdot f_{\xi}(at)$ xossasidan foydalanib, $\bar{\xi}_k$ tasodifiy miqdor xarakteristik funksiyasi uchun quyidagi ko'rinishni olamiz.



$$f_{\bar{\xi}_k}(t) = f_{\frac{2\xi_{k-1}}{\sqrt{n}}}(t) = e^{\frac{-it}{\sqrt{n}}} \cdot f_{\xi_k}\left(\frac{2t}{\sqrt{n}}\right)$$

(7) tenglikdan foydalanib $f_{\bar{\xi}_k}(t)$ ni quyidagicha yozamiz.

$$f_{\bar{\xi}_k}(t) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{2it}{\sqrt{n}}} + 1 \right) \cdot e^{\frac{-it}{\sqrt{n}}}$$

Endi e^{ix} funksiyaning Makloren qatori $e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ dan foydalanib, $f_{\bar{\xi}_k}(t)$ ni quyidagicha yozib olamiz:

$$f_{\bar{\xi}_k}(t) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + 1 - \frac{2it}{\sqrt{n}} + \frac{2t^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \cdot \left(1 - \frac{it}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar yig'indisining xarakteristik funksiyasi bu tasodifiy miqdorlarning xarakteristik funksiyalari ko'paytmasiga teng – xossasidan va (8) tenglikdan foydalanib, $S_n(\omega)$ ning xarakteristik funksiyasini quyidagi ko'rinishda yozishimiz mumkin:

$$f_{S_n(\omega)}(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^n.$$

Demak, u $n \rightarrow \infty$ da $e^{-\frac{t^2}{2}}$ ga nuqtaviy yaqinlashadi. Teskari limit teorema (2-teorema)ga ko'ra $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ tasodifiy miqdorlar markaziy limit teoremani qanoatlantiradi.

Bizga chekli matematik kutilmaga ega bo'lgan $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Sh.Q. Formanov. Ehtimolliklar nazariyasi. Toshkent, Universitet, 2014, 266 b.
2. A. Abdushukurov, T. Zuparov. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. Toshkent, Tafakkur-Bo'stoni, 2015, 416 b.
3. Abdullayev J.I., Quljonov O'.N. Ehtimollar nazariyasidan masalalar to'plami. Samarqand, SamDU, O'quv qo'llanma 2022, 240 b.