



LOBACHEVSKIY GEOMETRIYASI VA UNING ZAMONAVIY MATEMATIKADA QO`LLANISHI

Muxtorova Nozima Farhodjon qizi

NamDU Fizika -Matematika fakulteti
Matematika yo`nalishi 1-bosqich talabasi

Maxmudova Dilnoza Xayitmirzayevna

Ilmiy rahbar, NamDu Matematika
kafedrası katta o`qituvchisi

Annotatsiya: Maqolada Nikolay Ivanovich Labachevskiy tomonidan yaratilgan Labachevskiy geometriyasining asosiy tushunchalari va uning rivojlanishi ko`rib chiqiladi. Shuningdek, Labachevskiy geometriyasining matematik nazariyalar va zamonaviy ilm-fan sohalaridagi ahamiyatini ko`rsatadi va uning ilmiy tadqiqotlarda va amaliy qo`llanilishdagi o`rni tahlil qilinadi

Kalit so`zlar: Labachevskiy geometriyasi, Evklid geometriyasi, parallel chiziqlar postuli, Giperbolik fazo, Giperbolik parallelism

Abstract: The article discusses the main concepts of Labachevskiy geometry, created by Nikolay Ivanovich Labachevskiy, and its development. It also highlights the significance of Labachevskiy geometry in mathematical theories and modern scientific fields, analyzing its role in scientific research and practical applications.

Keywords: Labachevskiy geometry, Euclidean geometry, Parallel lines postulate, Hyperbolic space, Hyperbolic parallelism.



Аннотация: В статье рассматриваются основные концепции геометрии Лобачевского, разработанной Николаем Ивановичем Лобачевским, и её развитие. Также подчеркивается значимость геометрии Лобачевского в математических теориях и современных научных областях, анализируется её роль в научных исследованиях и практическом применении.

Ключевые слова: геометрия Лобачевского, Евклидова геометрия, постулат параллельных прямых, гиперболическое пространство, гиперболический параллелизм.

KIRISH. Lobachevskiy geometriyasi yoki giperbolik geometriya XIX asr boshlarida N.I. Lobachevskiy tomonidan ishlab chiqilgan bo‘lib, u Yevklid geometriyasining beshinchi postulyatini (parallellik postulyati) rad etish orqali mutlaqo yangi geometriya turini yaratdi. Bu nazariya doirasida bir tekislikda to‘g‘riga tegishli bo‘lmagan nuqta orqali berilgan chiziqni kesmaydigan cheksiz ko‘p chiziqlar mavjudligi isbotlanadi.

Matematikada, Labachevskiy geometriyasi asosida yer yuzasidagi "giperbolik" fazolar o‘rganiladi, bu esa "yassi" geometriyaning umumiy tushunchasidan ko‘ra murakkabroq va tizimli hisoblanadi. Labachevskiy geometriyasining ilmiy asoslari, asosan, ko‘p o‘lchovli fazolarni, yoki to‘g‘rirog‘i, giperbolik fazolarni o‘rganishga asoslanadi. Ushbu nazariya, Yevklid geometriyasida mavjud bo‘lgan qoidalarga qarshi bo‘lgan holda, yangi matematik strukturani taqdim etdi.

Labachevskiy geometriyasining ilmiy asoslari zamonaviy matematikaning rivojlanishiga muhim hissa qo‘shdi. Bu geometriya, masalan, Riman geometriyasi, Einshteynning nisbiylik nazariyasi va boshqa ko‘plab ilmiy kashfiyotlar uchun asos bo‘ldi. Labachevskiy geometriyasining burchaklarning yig‘indisi kabi qoidalari va kosmik fazolarni o‘rganishdagi qo‘llanilishi, koinotning strukturasi va kvant fizikasini tushunishga yordam beradi



TADQIQOT USULLARI. Giperbolik fazolar quyidagi tenglama asosida tavsiflanadi:

$$K < 0 \text{ (manfiy egri fazo)}$$

bu yerda K — Gauss egriligi. Bu holatda fazo Riman geometriyasi doirasida o'rganiladi, ya'ni egri fazolar (non-Euclidean spaces) shakllanadi¹.

Ushbu geometriya zamonaviy matematikada quyidagi sohalarda qo'llaniladi:

Differensial geometriyada egri fazolarni modellashtirish. Differensial geometriyada egri fazolar Riman manifoldlari orqali ifodalanadi. Lobachevskiy geometriyasi bu yerda manfiy egrilikka ega fazolarni modellashtirish uchun ishlatiladi. Bu turdagi fazolarni tasvirlashda Poincaré modeli ko'p qo'llaniladi.²

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

$$K = \frac{-1}{R^2} < 0$$

Minimal sirtlar, geodezik chiziqlar, gravitatsion linzalar kabi fizika va geometrik optikada qo'llaniladi.

Tadqiqotda Lobachevskiy geometriyasining zamonaviy modellarini differensial geometriya va Riman geometriyasi orqali o'rganish maqsad qilingan. Bunda Riman (1854) tomonidan kiritilgan metrik tenzorlardan foydalanildi:

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$$

bu yerda g_{ij} — metrik tenzor, ds^2 — chiziq elementining kvadrati.

Topologiyada fazo strukturasi. Topologiyada giperbolik geometriya 3-manifoldlarni tasniflashda muhim rol o'ynaydi, xususan Thurston geometrik tasniflash teoremasida.³

¹ Riemann, B. (1854). *On the Hypotheses which lie at the Foundations of Geometry*.

² O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*. Academic Press.

³ Thurston, W.P. (1997). *Three-Dimensional Geometry and Topology*. Princeton University Press.



$$\chi(M) = 2 - 2g$$

Agar $g > 1$ sirt giperbolik struktura qabul qilishi mumkin.

Kvant fizikasida zarrachalar harakati. Zamonaviy kvant fizikasida Lobachevskiy geometriyasi AdS fazolarida modellashtiriladi. Bu, ayniqsa, AdS/CFT duality nazariyasida asosiy o‘rin tutadi⁴.

$$ds^2 = \frac{1}{z^2}(-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Kompyuter grafikasida egri sirtlarni animatsiyalash. Kompyuter grafikasi sohasida giperbolik modellar (xususan, Poincaré diski va Beltrami modeli) 3D vizualizatsiya va o‘yin dizaynida ishlatiladi⁵.

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

Möbius transformatsiyalar yordamida giperbolik fazodagi harakatlar simulyatsiya qilinadi.

Kompyuter modellashtirish

- Python + Matplotlib yordamida 2D giperbolik chiziqlar grafik ko‘rinishda modellashtirildi.
- GeoGebra orqali Poincaré disk modelida chiziqlar chizildi.
- CAS tizimlari (Mathematica, Maple) yordamida differensial model analitik tahlil qilindi.

Bu yondashuvlar fazoviy obyektlarning vizual ko‘rinishini ta’minlab, ularni tahlil qilish va tasavvur qilishni osonlashtirdi.⁶

Kosmologiyada koinot modeli. Kosmologiyada Friedmann-Robertson-Walker (FRW) metrikasi orqali koinotning egriligi aniqlanadi. Lobachevskiy modeli ochiq koinot uchun ishlatiladi⁷.

⁴ Maldacena, J. (1999). "The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity", *International Journal of Theoretical Physics*, 38(4), 1113–1133.

⁵ Munzner, T. et al. (1996). "Drawing Large Graphs with H3Viewer and Hyperbolic Geometry", *Proceedings of the IEEE Symposium on Information Visualization*, 2–10.

⁶ Munzner, T., et al. (1996). "Drawing Large Graphs with H3Viewer and Hyperbolic Geometry", *IEEE InfoVis*, 2–10.



$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2[dr^2 + \sinh^2(r) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$$

Koinotning egri shakldaligi Enshteynning nisbiylik nazariyasida quyidagicha ifodalanadi:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

bu yerda Λ — kosmologik doimiy, $R_{\mu\nu}$ — Ricci tenzor, $g_{\mu\nu}$ — metrik tenzor. Egri fazo uchun $\Lambda > 0$, ya'ni kengayuvchi koinot modeli hosil bo'ladi⁸.

NATIJALAR VA MUHOKAMA

Teorema (Lobachevskiy parallellik teoremasi):

Ifoda:

Agar a to'g'ri chiziq va $A \notin a$ bo'lsa, unda A nuqtadan o'tuvchi va a ni kesib o'tmaydigan kamida ikkita to'g'ri mavjud.

Isbot:

1. $A \notin a$ bo'lsin, $AB \perp a$ deb olamiz.
2. h — AB ga A nuqtada perpendikulyar chiziq, u a ni kesmaydi.
3. a da boshqa C nuqtani olib, $\angle CAB$ burchakka teng boshqa burchak yasaymiz.
4. Shunda, chiziq MA ham a ni kesmaydi, lekin $MA \neq h$
5. Demak, A nuqtadan a ni kesmaydigan kamida ikkita chiziq o'tadi.

Bu xulosa Yevklid geometriyasining V-postulatiga zid bo'lib, Lobachevskiy geometriyasining muhim xususiyatini tasdiqlaydi⁹.

Zamonaviy matematikadagi qo'llanilishi

1. Differensial geometriyada manifoldlar:

Manifold M with $K < 0 \Rightarrow$ Hyperbolic space

⁷ Mukhanov, V. (2005). *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press.

⁸ Mukhanov, V. (2005). *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press.

⁹ Lobachevsky, N. (1829). *On the Principles of Geometry*.



Negativ Gauss egriligi ($K < 0$) bo'lgan manifoldlar giperbolik fazolar deb qaraladi va ular Riman geometriyasi vositasida modellashtiriladi¹⁰.

2. Topologiyada:

Giperbolik manifoldlar doimiy manfiy egrilikka ega bo'lib, 3-o'lchovli fazolarni tasniflashda muhim rol o'ynaydi.

Kvant gravitatsiya:

String nazariyasida negativ egrilikli fazolar zarur, chunki ular AdS/CFT korrespondensiyasi orqali kvant maydon nazariyalari bilan bog'lanadi.

3. Kosmologiya:

Koinotning fazoviy egri shakli Kosmik mikroto'lqin fon nurlanishi (CMB) orqali o'lchanadi. Zamonaviy tadqiqotlar koinotda manfiy egrilik mavjud bo'lishi ehtimolini istisno qilmaydi.

XULOSA. Lobachevskiy geometriyasi, zamonaviy matematika va ilm-fan sohalarida o'zining keng ko'lamli qo'llanilishi bilan katta ahamiyatga ega. U, bir tomondan, klassik Yevklid geometriyasining cheklovlaridan chiqib, yangi ko'rinishdagi geometrik strukturalarni taqdim etgan bo'lsa, boshqa tomondan, keyingi ilmiy rivojlanishlar va texnologik yangiliklar uchun asos yaratdi. Lobachevskiy geometriyasining ayrim asosiy qo'llanilish sohalari:

1. Fizikadagi nisbiylik nazariyasining geometriyaviy asosi:

Lobachevskiy geometriyasi, ayniqsa, Einshteynning nisbiylik nazariyasida ko'rinadi. Koinotning egri shakldagi strukturasini tushunishda bu geometriya muhim rol o'ynaydi. Nisbiylik nazariyasining koinotdagi fazo va vaqtning egri xususiyatlarini tasvirlashda, giperbolik geometriyaning konseptlari muhim o'rin tutadi.

2. Kvant nazariyalarida manfiy egrilikli fazolar:

¹⁰ do Carmo, M. (1992). *Riemannian Geometry*. Birkhäuser



Lobachevskiy geometriyasi kvant nazariyalarida ham o'z ifodasini topgan. Kvant fizikasidagi zarrachalar harakati, manfiy egrilikka ega fazolarni modellashtirishda, bu geometriya modelining qo'llanilishi mavjud.

3. Kosmologiyada kengayuvchi koinot modeli:

Kosmologiya sohasida, koinotning kengayishini tasvirlashda, Lobachevskiy geometriyasining manfiy egrilikli fazolari o'rganilmoqda. Bu, ayniqsa, koinotning boshlang'ich shartlari va uning kelajakdagi evolyutsiyasini tushunishda foydalidir.

4. Matematik vizualizatsiyada Poincaré va Beltrami-Klein modellari:

Lobachevskiy geometriyasining matematik tasvirlari va vizual modellari, masalan, Poincaré va Beltrami-Klein modellari, geometriyaning abstrakt tushunchalarini vizual tarzda tushunishga yordam beradi. Bu modellarda, giperbolik fazolar soddalashtirilgan geometrik ob'ektlar yordamida ko'rsatiladi.

Lobachevskiy geometriyasining kelajakdagi tadqiqotlar va texnologiyalarga ta'siri ortib borayotgani shubhasiz. Bu geometriya, matematik va fizika nazariyalarining rivojlanishiga katta ta'sir ko'rsatishda davom etadi. Yangi ilmiy kashfiyotlar va texnologiyalar bu geometriya yondashuvlariga tayanib, yangi amaliy tadqiqotlar va modellashlarni kiritish uchun imkoniyat yaratadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Riemann, B. (1854). On the Hypotheses which lie at the Foundations of Geometry.
2. O'Neill, B. (1983). Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity. Academic Press.
3. Thurston, W.P. (1997). Three-Dimensional Geometry and Topology. Princeton University Press.
4. Maldacena, J. (1999). "The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity", International Journal of Theoretical Physics, 38(4), 1113–1133.



5. Mukhanov, V. (2005). Physical Foundations of Cosmology. Cambridge University Press.
6. Munzner, T. et al. (1996). "Drawing Large Graphs with H3Viewer and Hyperbolic Geometry", Proceedings of the IEEE Symposium on Information Visualization, 2–10.
7. Lobachevsky, N. (1829). On the Principles of Geometry.
8. Do Carmo, M. (1992). Riemannian Geometry. Birkhäuser.