Vol.2 №11 (2024). November
Journal of Effective
innovativepublication.uz
INNOVATIVE PUBLICATION
Learning and Sustainable Innovation

Ретроспективные обратные задачи для уравнений параболического типа

Каримов Шахобиддин Туйчибоевич

Профессор кафедры прикладной математики и информатики

Ферганского государственного университета

shaxkarimov@gmail.com

Сулаймонова Ойгул Абдулатиф кизи

Магистр 2-курса факультета прикладной математики и информатики,

Ферганского государственного университета.

oygulgofurova0405@gmail.com

Аннотация: В данной статье изучены ретроспективные обратные задачи для параболических уравнений на прим.

Ключевые слова: Параболические уравнения, обратные задачи, уравнению Фредгольма 1-го рода, коэффициен Фурье.

В математической физике наиболее актуальны и важны постановки ретроспективных обратных задач для уравнений параболического типа – моделей, описывающих пространственно - временное распределение температуры и концентрации. Кроме того, основные методы исследования задач для таких постановок могут быть с успехом применены для более сложных связанных моделей, например, для моделей термоупругости. Для представленной в настоящей работе модели, в основном опираются на постановки для операторов параболического типа, обращение временных зависимостей представляет наибольшую трудность. Обращение соответствующих операторных уравнений приводит к задаче обращения вполне непрерывных операторов, соответственно, к линейным некорректным задачам, требующим регуляризации. При этом наиболее часто используется метод регуляризации Тихонова [1, 2], метод усеченных сингулярных разложений [3] и предложенный относительно недавно Р. Латтесом и Ж.Л. Лионсом метод квазиобращения [4, 5].

Рассмотрим следующую начально-краевую одномерную задачу для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{3}$$

$$u(x,T) = f(x), \ x \in [0,l], \tag{4}$$

Итак, поставим задачу о нахождении начального распределения температур $\varphi(x)$ по информации (4).

Для исследования обратной задачи построим соответствующие операторные уравнения, позволяющие связать заданные и искомые функции. Построим решение прямой задачи, используя метод разделения переменных и отыскивая решение в виде $u(x,t) = X(x)T(t)$. Разделяя переменные, получим

Vol.2 №11 (2024). November
Journal of Effective
innovativepublication.uz
INNOVATIVE PUBLICATION
Learning and Sustainable Innovation

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a}\frac{\dot{T}}{T} = const = -\lambda^2,$$

откуда выводим обыкновенное дифференциальное уравнение $X'' + \lambda^2 X = 0$ и определяем общее решение в виде $X = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$

Используя граничные условия, находим $C_2 = 0, C_1 \sin \lambda x = 0$ и, следовательно, определяем собственные значения и собственные функции:

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{l}, X_n = \cos \frac{\pi n x}{l}, T_n = C_n e^{-a\lambda^2{}_n}.$$

Удовлетворяя начальным условиям, определим неизвестные постоянные C_n:

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\cos \lambda_n \xi d\xi, n = 1,2..., C_o = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(\xi) d\xi.$$

Таким образом, решение прямой задачи имеет вид

$$u(x,t) = \int_0^l K(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi, \tag{5}$$

где

$$K(x,\xi,t) = \frac{1}{l} + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \cos \lambda_n x \cos \lambda_n \xi e^{-\lambda_n a t}. \tag{6}$$

Соотношение (6) позволяет определить поле температур в любой момент времени в произвольной точке стержня, если задано начальное распределение температуры.

Перейдем к обратной задаче. На основании формул (5) – (6) обратная задача при удовлетворении дополнительного условия (4) сводится к интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода

$$K_1\varphi = \int_0^l K_1(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi = f(x), \quad x\in[0,l], \tag{7}$$

причем $K_1(x,\xi)=K(x,\xi,T),$. Отметим, что ядро $K_1(x,\xi)$ является симметричным, а оператор $K_1\varphi$ – самосопряженным в $L_2[0,l]$. Собственные функции ядра – 1, $\cos\lambda_n x$ — представляют собой полную ортогональную систему в $L_2[0,l]$ а сингулярными числами оператора K_1 являются $\sigma_n^2 = e^{-\lambda_n^2 aT}$, $n=0,1,2....$, быстро убывающие при, $n\to\infty$. В поскольку силу оценки $\left|K_1(x,\xi)\right| \le \frac{1}{l}+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 aT}$ и сходимости ряда в правой части этого неравенства в соответствии с теоремой Вейерштрасса ядро, $K_1(x,\xi)$ представляет собой непрерывную функцию, следовательно, оператор $K_1(x,\xi)$ является вполне непрерывным из $L_2[0,l]$ в $L_2[0,l]$, поэтому K_1^{-1} неограничен и задача решения операторного уравнения (7) требует регуляризации. Заметим, что, используя ортогональность системы $\{1,\cos\lambda_n x\}$ нетрудно выписать формальное решение (7) с помощью линейного оператора вида

$$\varphi(\xi) = \int_0^l K_1^*(x,\xi) f(\xi)d\xi, \tag{8}$$

поскольку коэффициенты Фурье φ_k и f_k функций соответственно связаны зависимостью

$$\varphi(x)\sigma_n^2 = f_k, k=0,1... \tag{9}$$

Анализируя представление (7)–(8), заметим, что для сходимости ряда в представлении для $\varphi(x)$ в силу наличия у его элементов быстро растущих множителей $e^{\lambda_n^2 aT}$ необходимо требовать выполнения довольно жестких условий для характера убывания коэффициентов Фурье f_k. Это условие выполняется далеко не для всех функций из $L_2[0,l]$ даже бесконечно дифференцируемых. Таким образом, нельзя использовать формальное решение (6) для практических расчетов, когда функция $f(\xi)$ задана в некотором конечном наборе точек. Такая структура решения отражает факт неограниченности обратного оператора $K_1(x,\xi)$.

По-видимому, одним из наиболее эффективных способов построения регуляризованного решения (2.2.5) является метод усеченных сингулярных разложений, согласно которому это решение имеет вид

$$\varphi_\delta(x) = R_N f_\delta = \frac{1}{l}\int_0^l f_\delta(\xi)d\xi + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} f_\delta \cos\lambda_n\xi \cos\lambda_n x e^{-\lambda_n^2 aT}, \quad (10)$$

а число N (параметр регуляризации в данном случае) выбирается согласованным с погрешностью δ задания функции f $(\|f - f_\delta\| \le \delta)$. Найдем, из каких условий оно определяется. Оценим погрешность в норме $L_2[0,l]$:

$$\|R_N f_\delta - \varphi\|_{L_2[0,l]} \le \|R_N\| \cdot \|f - f_\delta\|_{L_2[0,l]} + \|R_N f - \varphi\|_{L_2[0,l]},$$

причем $\|R_N\| = (1 + \sum_{n=1}^{N} e^{-\lambda_n^2 aT})^{\frac{1}{2}} = M(N)$ монотонно возрастает с ростом, N а $\|R_N f - \varphi\|_{L_2[0,l]} = C(N)$ представляет собой норму остатка сходящегося ряда и, следовательно, стремится к 0 при $N \to \infty$.

Таким образом, погрешность регуляризованного решения оценивается через величину $m(N,\delta) = M(N)\cdot\delta + C(N)$ и по заданному δ всегда найдется N*δ доставляющее минимум $m(N,\delta)$. Если необходимо построить решение обратной задачи с погрешностью, не превышающей, ε при условии, что погрешность задания входных данных, δ то порядок величины N таков: $N = c^{-1}\ln(\frac{\varepsilon}{\delta}),\ \ c = \pi l^{-1}(aT)^{0.5}$

Отметим, что при определенных соотношениях между параметрами ε и δ может так случиться, что такого целого N не существует, соответственно, необходимой точности решения при заданной погрешности входных данных достигнуть невозможно.

Литература:

1. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. – М: Наука, 1980. – 286 с

2. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 287 с.

3. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. – М.: Физматлит, 2007. – 224 с.

4. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач. – М.: МГУ, 1994. – 208 с.

5. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. – М.: Мир, 1970. – 336 с.

6. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН, сер. матем. - 1951. - Т.15.- С. 309-360.

7. Крейн М.Г. Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи // Докл. АН СССР. - 1954. - Т.94, № 6. - С. 767-770.

8. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. - М.: Наука, 1984. -263 с.
9. Кабанихин С.И. Проекционно-разностные методы определения коэффициента гиперболических уравнений. - Новосибирск: Наука, 1988.- 168 с.
10. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. - 457 с.
11. Лаврентьев М.М. Некорректные задачи для дифференциальных уравнений. учебное пособие. - НГУ, 1981. - 75 с.
12. Каримов Ш.Т., Юлбарсов Х. Задача Гурса для одного псевдопараболического уравнения третьего порядка с оператором Бесселя. Материалы IX международной научной конференции «Современные проблемы математики и физики» посвященная 70-летию чл.-корр. АН РБ К.Б. Сабитова, 12 - 15 сентября, Стерлитамак, 2021 г.
13. Каримов Ш.Т., Мамадалиева Ш. Решение коэффициентной обратной задачи для гиперболического уравнения сведением её к уравнению Гелфанда-Левитана первого рода. Fars Int J Edu Soc Sci Hum 10(12), 2022; Volume-10, Issue-12, pp. 142-151.
14. Каримов Ш.Т. О некоторых обобщениях свойств оператора Эрдейи-Кобера и их приложение. Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2017. № 2(18). С. 20-40. DOI: 10.18454/2079-6641-2017-18-2-20-40.
15. Каримов Ш.Т. Новые свойства обобщенного оператора Эрдейи – Кобера и их приложения. Доклады АН РУз. – 2014. -№ 5 -С. 11-13