



Matematikadagi eng qadimgi hal qilinmagan muammo:

Toq mukammal son mavjudmi?

O'sarov Toshniyoz Shuxrat o'g'li

O'zbekiston-Finlaniya pedagogika instituti

Aniq va amaliy fanlar fakulteti (2-04-guruh) talabasi

Boymatov Asilbek Nurqul o'g'li

O'zbekiston-Finlaniya pedagogika instituti

Aniq va amaliy fanlar fakulteti (2-05-guruh) talabasi

Annotatsiya: Ushbu maqolada matematikaning eng dolzarb muammolaridan biri bo'lgan toq mukammal sonlar haqida so'z boradi. Maqola bu muammo ustida kimlar ishlagani va qanday natijalarga erishganligi, hozirgi kundagi ma'lum bo'lgan eng katta mukammal son haqida.

Kalit so'zlar: Mukammal sonlar, sigma funksiya, Mersin tub sonlari, Toq mukammal son, Yevklid algoritmi.

Bundan 2000 yil oldingi yechimini topmagan muammo. 2000-yilda matematik olim Peergoiorgio Odifreddi uni o'sha paytdagi eng dolzarb 4 ta ochiq masalalar qatoriga kiritgan. Ushbu muammoni hal qilish bitta raqamni topishdek oddiy bo'lishi mumkin. Shuning uchun olimlar 10 gacha bo'lgan raqamlarning 2200-darajasigacha tekshirib ko'rishgan: 10^{2200} . Ammo haligacha yechim yo'q.

Muammo shunday bironta toq mukammal son mavjudmi? Ma'lumki, mukammal son - o'zigacha bo'lgan bo'luvchilari yig'indisi o'ziga teng bo'lgan son. Masalan, 6(1) va



28(2).Uning bo'luvchilari:1,2,3 va 6.O'zigacha bo'lgan bo'luvchilari:1,2,3.Haqiqatdan ham Ularning yig'indisi 6 ga teng.

$$1 + 2 + 3 = 6$$

$$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$$

6 va 28 mukammal sonidir.Boshqa sonlarda bu yig'indi o'zi bilan teng bo'lmaydi.10000 gacha tekshirib ko'rsak,keying ikkita mukammal sonni topamiz: 496(3), 8128(4).

Agar biz ushbu sonlarning umumiy hadini topsak,ko'proq mukammal sonlarni tahlil qilishimiz mumkin.Xush ulardagi umumiylik nimada.

6

28

496

8128

Har bir keyingi son o'zidan oldingi sondan bir xona uzunroq.Shu bilan birga oxirgi raqam 6 yoki 8 bo'ladi.Bu esa ularning hammasi juft ekanligini bildiradi.Ammo sonlarning boshqa jihati ham bor:

$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$28 = 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 7$$

$$496 = 1 + 2 + 3 + \dots + 31$$

$$8128 = 1 + 2 + 3 + \dots + 127$$

6 dan tashqari hasr bir son toq kublarning yig'indisi:

28 =

$$1^3 + 3^3$$

$$496 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3$$

$$8128 = 1^3 + 3^3 + \dots + 15^3$$

Yana bir qiziq tomoni o'nlik sanoq tizimidan ikkilikka o'tkazsak,



$$6_{10} = 110_2$$

$$28_{10} = 11100_2$$

$$496_{10} = 111110000_2$$

$$8128_{10} = 1111111000000_2$$

Bu ko'rinishga keladi. Shu bilan birga quyidagiga ham ega bo'lamiz:

$$6 = 2^2 + 2^1$$

$$28 = 2^4 + 2^3 + 2^2$$

$$496 = 2^8 + \dots + 2^4$$

$$8128 = 2^{12} + \dots + 2^6$$

(Aslida matematikaning go'zalligi ham shunda-da)

Endi tarixga nazar tashlasak. Miloddan avvalgi 300-yilda Yevklid bu sonlarning umumiy formulasini keltirib chiqardi. 2^n dan 1 ni ayirsak va natija tub son bo'lsa,

$2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ ushbu son mukammal son bo'ladi.

$$(2^2 - 1) \cdot 2^1 = 3 \cdot 2 = 6$$

$$(2^3 - 1) \cdot 2^2 = 7 \cdot 4 = 28$$

$$2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$$

Bu mukammal sonlarning umumiy formalisidir. Bu yerda

$2^n - 1$ tub son. Ammo, bu tub sonni 2^{n-1} – juft songa ko'paytirsak, yana juft son hosil bo'ladi. Ya'ni Yevklid juft mukammal sonlarni topgan. Shu bilan birga bu yagona usul ekanligin ham isbotlamagan.

Milodiy 100-yilda Nikomaks mukammal sonlar haqida 5 ta taxminni bayon qildi:

1. n - mukammal son n xonali bo'ladi;
2. Barcha mukammal sonlar juft;
3. Barcha mukammal sonlar ketma-ket 6 va 8 bilan tugaydi;
4. Evklid algoritmi faqat juft mukammal sonlar uchun;



5. Cheksiz ko'p mukammal sonlare mavjud.

Keyingi ming yillikda hech kim bu taxminlarni isbotlay yoki inkor eta olmadi. Lekin, o'n uchinchi asrda misrlik matematik 10 ta mukammal sonlarni e'lon qildi:

T/r	n	$2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$
1	2	6
2	3	28
3	5	496
4	7	8128
5	9	130 816
6	11	2 096 128
7	13	33 550 336
8	17	8 589 869 056
9	19	137 438 691 328
10	23	35 184 367 894 528

Keyinchalik bu sonlardan 3 tasi umuman mukammal emasligi aniq bo'lgan:

T/r	n	$2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$
1	2	6
2	3	28
3	5	496
4	7	8128
5	9	130 816
6	11	2 096 128
7	13	33 550 336



8	17	8 589 869 056
9	19	137 438 691 328
10	23	35 184 367 894 528

Bulardan 5-si 5-xonali emas , balki 8 xonali son edi.Bundan Nikomaksning 1-farazi xatoligi kelib chiqadi. 5- va 6- sonlar 6 bilan tugaydi.Bu esa Nikomaksning 3-farazini yo'qqa chiqaradi.1732-yilda Eyler 8-mukammal sonni topdi va Sigma funksiyasini yaratgan.

$$\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 6 \cdot 2$$

$$\sigma(7) = 1 + 7 = 8$$

$$\sigma(20) = 1 + 2 + \dots + 20 = 42$$

Mukammal sonning sigma funksiyasi sonning ikki barobarini beradi.Chunki sonning o'zi ham qo'shiladi.

$$\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 6 \cdot 2$$

Ma'lumki,har qanday natural sonni tub sonlar ko'paytmasi ko'rinishida yozish mumkin.

$$N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$$

Bu funksiyaning kuchli tomoni shundaki,Uni tashkil etuvchilar ko'paytmasi ko'rinishida yozish mumkin.U multiplikativ funsiyadir.

$$\sigma(N) = \sigma(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}) = \sigma(p_1^{\alpha_1}) \cdot \sigma(p_2^{\alpha_2}) \cdot \dots \cdot \sigma(p_n^{\alpha_n})$$

Masalan,

$$\sigma(20) = \sigma(2^2)\sigma(5) = (1 + 2 + 4) \cdot (1 + 5) = 42$$

O'zining yangi funksiyasi bilan Eyler Nikomaksning 4-farazini isbotladi.Ya'ni har bir juft son Yevklid algoritmgiga bo'ysinishini isbotladi.



Bu Yevklid-Eyler teoremasi 1600-yillik muammoni yechdi. Ammo Eyler hali ishni tugatmagan edi. U toq mukammal sonlar muammosini hal qilmoqchi. N toq mukammal son mavjud bo'lsa, birinchidan u toq, ikkinchidan $\sigma(N) = 2N$. N ni $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$

ko'rinishda yozish mumkin.

$$\sigma(N) = \sigma(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}) = \sigma(p_1^{\alpha_1}) \cdot \sigma(p_2^{\alpha_2}) \cdot \dots \cdot \sigma(p_n^{\alpha_n}) = 2N$$

Endi e'tibor berishg kerak bo'lgan jihat shundaki, agar tub son toq darajaga ega bo'lsa, uning sigma qiymati juft bo'ladi:

$$\sigma(7) = 1 + 7 = 8 = 2k$$

Doim (toq son) +(toq son)=(juft son) bo'ladi. Agar tub sonning darajasi juft bo'lsa, uning sigma qiymati toq bo'ladi:

$$\sigma(7^2) = 1 + 7 + 7^2 = 57 = 2k - 1$$

Demak, $\sigma(p^{2k-1}) = 2k$, $\sigma(p^{2k}) = 2k - 1$ bo'ladi. Shunday qilib Eylerning daho tushunchasi vujudga keldi. Ushbu formulaning $\sigma(p_1^{\alpha_1}) \cdot \sigma(p_2^{\alpha_2}) \cdot \dots \cdot \sigma(p_n^{\alpha_n}) = 2N$ o'ng tomonida $2N$ bor. Buning ma'nosi shundaki, chap tomonda faqat 1 ta ikki soni bo'lishi kerak. Chunki, agar 2 ta ikki son bo'lsa,

$$\sigma(p_1^{\alpha_1}) \cdot \sigma(p_2^{\alpha_2}) \cdot \dots \cdot \sigma(p_n^{\alpha_n}) = 4k = 2N \text{ bo'ladi.}$$

Bu esa, ($4k = 2N$) N ning juftligini ko'rsatadi. Bundan kelib chiqadiki, sigmalardan faqat 1 tasi juft bo'lishi mumkin:

$$N = p_j^{2k-1} \cdot ((p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n})^{2k}.$$

$$\text{Keyin Eyler formulani aniqlashtirdi: } N = p^{4k+1} \cdot M^2$$

ko'rinishida bo'lishini isbotladi. Lekin bu sonning bor yoki yo'qligini isbotlamadi.

1644-yilda Marn Mersin Evklid formulasi shaklidagi sonlarni ko'rib chiqib, π ning dastlabki 11 ta qiymatlarini o'z ichiga olgan tub sonlarni topdi va bu o'sha tub sonlar ekanligini davo qilgan.

$$2, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67$$



Ammo, $2^{67} - 1 = 147\,573\,953\,589\,676\,412\,927$ kabi katta sonlarni tub yoki tub emasligini tekshirmaganini tan olgan.

Olimlar izlanishda davom etishdi. Ularning aksariyati Mersinning taklif qilgan tub sonlar ro'yxatidan boshlashdi. Uning ro'yxatida 67 turar edi. Eduard Lukas $2^{67} - 1$ ni mukkamal son emasligini isbotladi. Keyinchalik Fredrix Nilsen Amerika matematika ham jamiyatida nutq so'zlaydi. U bir og'iz so'z aytmay. Doskaga

$$2^{67} - 1 = 147\,573\,953\,589\,676\,412\,92 \text{ va doskaning bir tomoniga o'tib,}$$

$$193\,707\,721 \cdot 761\,838\,257\,287 = 147\,573\,953\,589\,676\,412\,927$$

ni yozdi.

1952-yilda Rafael Robinson Mersin tub sonlarini topishning kompyuter dasturini yaratdi. 10 oy ichida keying 5 ta Mersin tub soni va unga mos mukammal son topildi.

T/r	Mersin tub soni	Mukammal son
13	$2^{521} - 1$	$(2^{521} - 1) \cdot 2^{520}$
14	$2^{607} - 1$	$(2^{607} - 1) \cdot 2^{607}$
15	$2^{1279} - 1$	$(2^{1279} - 1) \cdot 2^{1279}$
16	$2^{2203} - 1$	$(2^{2203} - 1) \cdot 2^{2203}$
17	$2^{2281} - 1$	$(2^{2281} - 1) \cdot 2^{2281}$

Kompyuter yordamida ketma-ket Mersin tub sonlari topildi.

t/r	Mersin tub soni	Xonalar soni
18	$2^{3217} - 1$	969
19	$2^{4253} - 1$	1281
20	$2^{4423} - 1$	1332
21	$2^{9283} - 1$	2917
22	$2^{9941} - 1$	2993



23	$2^{11213} - 1$	3376
----	-----------------	------

2017-yilda olimlar 50-Mersin tub sonini topdi. U o'sha paytdagi ma'lum bo'lgan eng katta tub son edi. 2018-yilda 51-Mersin tub soni topildi. Hozirgi kunda u eng katta Mersin tub sonidir.

Xulosa. Mersin tub sonlari shunchalik katta va kam uchraydiki, ularni topish uchun ko'p vaqt va kompyuter resurslari kerak bo'ladi. 1991-yilda olimlar toq mukammal son mavjud bo'lsa, u 10^{300} dan kattaligini aniqlashdi. Yangi yutuqlar esa bu sonni 10^{2200} gacha oshirdi. Raqamlar juda katta bo'lsa, kompyuter yaqin orada uni topishi dargumon.

Adabiyotlar:

1. A. Baker, A Concise Introduction to the Theory of Numbers, Cambridge University Press, 1984
2. R. Friedberg, An Adventurer's Guide to Number Theory, Dover, 1994.
3. V.J. Katz, A History of Mathematics, Brief Version, Pearson, 2004.
4. Youtube: @xurmomedia (Xurmo kanali);
5. Internet manbalari.