



MATEMATIK INDUKSIYA USULINI ISBOTLASHDA QO'LLANILISHI

Qurbonaliyeva Shoir Maxmanazarovna

SamDCHTI akademik litseyi

matematika fani bosh o'qituvchisi

qurbonaliyevashoira2@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu ilmiy maqolada akademik litseylarning chuqurlashtirilgan guruh o'quvchilari, mustaqil o'rganuvchilar uchun matematik induksiya usulidan samarali foydalanish va uni hisoblashda, ba'zi ayniyatlarni, ba'zi tengsizliklarni isbotlashda qo'llanilishi haqida to'xtab o'tilgan

Kalit so'zlar: mulohaza, induksiya bazisi, induksiya farazi, induksiya qadami

Yangi O'zbekistonni yuksak marralarga erishishi uchun 2026 yilgacha Taraqqiyot strategiyasi doirasida belgilangan 5 ta asosiy vazifalardan birinchisi bu- ta'lim sohasini tubdan qayta ko'rib chiqishdir. Zero, ertasini o'ylagan, taraqqiyotni ko'zlagan davlat ta'limga e'tibor qaratadi...

Ushbu maqola yoshlar uchun sifatli ta'limni ta'minlashda, iqtidorli yoshlar qobiliyatini rivojlantirishda, ijodkor, ijtimoiy faol, kreativ, ma'naviy boy shaxsni shakllantirishda, hamda, yuqori malakali raqobatdosh kadrlar tayyorlashda yordam beradi degan umiddaman.

MATEMATIK INDUKSIYA USULI YORDAMIDA BA'ZI AYNIYATLARNI ISBOTLASH



Matematik induksiya usuli - XVII asrning o‘rtalarida (Paskal 1623-1662, Dekart, Yakov Bernulli 1654-1705) ishlab chiqilgan bo‘lib, hisoblashda, ba’zi ayniyatlarni, tengsizliklarni isbotlashda qo‘llaniladi.

Matematik induksiya aksiomasi, natural son n ga bog‘liq bo‘lgan biror $A(n)$ mulohazaning barcha natural n larda to‘g‘ri ekanligini isbotlashning quyidagi usulini beradi:

- 1) $A(n)$ mulohazaning $n = 1$ uchun to‘g‘riligini ko‘rsatamiz (induksiya bazisi);
- 2) Bu mulohaza $n = k$ da to‘g‘ri deb faraz qilamiz (induksiya farazi);
- 3) qilingan farazdan foydalanib, $A(n)$ mulohaza $n = k + 1$ da to‘g‘ri bo‘lishini ko‘rsatamiz (induksiya qadami).

1-misol. $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$ yig‘indini hisoblang.

Yechish: Avval bitta, ikkita, uchta, to‘rtta qo‘shiluvchilar uchun yig‘indini hisoblaymiz (induksiya – lotincha bo‘lib, “hosil qilish”, “yaratish” ni anglatadi).

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

$$S_4 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}$$

Har bir yig‘indini surati qo‘shiluvchilar soniga teng bo‘lib, maxraji undan bitta katta. Bu har qanday n uchun $S_n = \frac{n}{n+1}$ taxmin qilish imkonini beradi. Bu taxminning to‘g‘riligini tekshirishga matematik induksiya usulini qo‘llaymiz.

- 1) $n = 1$ bo‘lganda taxmin to‘g‘ri, yani, $S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$
- 2) $n = k$ da $S_n = \frac{k}{k+1}$ deb taxmin qilib, $n = k + 1$ uchun bu taxminning to‘g‘riligini tekshiramiz.



$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Shunday qilib, $n = k$ uchun to'g'riligini faraz qilgan holda, uni $n = k + 1$ hol uchun isbot qildik, yani $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ formula barcha natural n uchun to'g'ri.

2-misol. $1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ tenglikni isbotlang.

Isboti:

1) $n=1$ uchun $1=\frac{1(1+1)}{2}$; $1=1$

2) $n=k$ uchun $1+2+3+\dots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ deb olib,

3) $n=k+1$ uchun $1+2+3+\dots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ ni isbot qilamiz.

$$1+2+3+\dots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} + \frac{1}{(2k+3)(2k+5)} &= \\ &= \frac{k}{3(2k+3)} + \frac{1}{(2k+3)(2k+5)} = \frac{1}{2k+3} \left(\frac{k}{3} + \frac{1}{2k+5} \right) = \\ &= \frac{1}{2k+3} \cdot \left(\frac{k(2k+5)+3}{3(2k+5)} \right) = \frac{1}{2k+3} \left(\frac{2(k+1)(k+\frac{3}{2})}{3(2k+5)} \right) = \\ &= \frac{1}{2k+3} \cdot \frac{(k+1)(2k+3)}{3(2k+5)} = \frac{k+1}{3(2k+5)} \end{aligned}$$

3-misol. $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n \alpha + i \sin n \alpha$ ayniyatni isbotlang.

Yechish: 1) $n=1$ bo'lganda tenglikning ikkala tomoni bir xil, ya'ni $\cos \alpha + i \sin \alpha$ ga teng.

2) $n = k$ bo'lganda $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^k = \cos k \alpha + i \sin k \alpha$ tenglik o'rinli deb faraz qilamiz va $n = k + 1$ uchun to'g'riligini tekshiramiz:

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \sin \alpha)^{k+1} &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)^k \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha) = \\ &= (\cos k \alpha + i \sin k \alpha)(\cos \alpha + i \sin \alpha) = \end{aligned}$$



$$(\cos k\alpha \cos \alpha - \sin k\alpha \sin \alpha) + i(\cos k\alpha \sin \alpha + \sin k\alpha \cos \alpha) = \cos(k\alpha + \alpha) + i \sin(k\alpha + \alpha) = \cos(k+1)\alpha + i \sin(k+1)\alpha$$

Bu formulani $n=k+1$ bo'lganda ham to'g'riligini bildiradi. Matematik induksiyaning ikkala sharti ham bajarildi, shu bilan ayniyat barcha natural n uchun to'g'ri bo'ladi.

4-misol. n ning barcha natural qiymatlarida $a_n = 6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}$ ni 17 ga bo'linishini isbotlang.

Yechish:

1) $n=1$ bo'lganda $a_1 = 6^2 + 19 - 2^2 = 36 + 19 - 4 = 51 = 3 \cdot 17$

2) $n=k$ da $a_k = 6^{2k} + 19^k - 2^{k+1}$ 17 ga bo'linadi deb faraz qilamiz va

3) $n=k+1$ bo'lganda 17 ga bo'linishi isbotlaymiz: $a_{k+1} = 6^{2(k+1)} + 19^{k+1} - 2^{k+1+1} = 36 \cdot 6^{2k} + 19 \cdot 19^k - 2 \cdot 2^{k+1} = (34 + 2)6^{2k} + (17 + 2) \cdot 19^k - 2 \cdot 2^{k+1} = 2(6^{2k} + 19^k - 2^{k+1}) + 34 \cdot 6^{2k} + 17 \cdot 19^k = 2 \cdot a_k + 17(2 \cdot 6^{2k} + 19^k)$

farazga ko'ra a_k 17 ga bo'linadi, ikkinchi qo'shiluvchida 17 ko'payuvchi bo'lgani uchun u 17 ga bo'linadi, demak yig'indi a_{k+1} ham 17 ga bo'linadi.

Matematik induksiya jarayoniga ko'ra, a_n n ning barcha natural qiymatlarida 17 ga bo'linadi.

5-misol. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ n ning barcha natural qiymatlarida tenglik to'g'ri bo'lishini isbotlang.

Isboti: 1) $n=1$ $1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$; $2=2$

2) $n=k$ $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$

3) $n=k+1$ $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) =$

$= (k+1)(k+2) \left[\frac{k}{3} + 1 \right] = (k+1)(k+2) \left(\frac{k+3}{3} \right) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$. Isbot tugadi.



MATEMATIK INDUKSIYA USULI YORDAMIDA BA’ZI TENGSIZLIKLARNI ISBOTLASH

Matematik induksiya usuli yordamida tengsizliklarni isbotlash ayniyatlarini isbotlash kabi olib boriladi:

- 1) tengsizlikning to‘g‘riligi $n = 1$ hol uchun tekshiriladi;
- 2) $n = k$ uchun tengsizlik to‘g‘ri deb faraz qilinadi va
- 3) $n = k + 1$ bo‘lganda isbot qilinadi.

Buni misollarda ko‘rib chiqamiz:

1-misol. Ixtiyoriy n va $a \geq -1$ bo‘lganda $(1 + a)^n \geq 1 + na$ ekanligini isbot qilamiz.

Yechish: 1) $n=1$ bo‘lganda $1 + a = 1 + a$ qanoatlantiradi. 2) $n = k + 1$ bo‘lganda $(1+a)^k \geq 1 + ka$ o‘rinli deb faraz qilamiz va $n=k+1$ bo‘lganda isbot qilamiz: $(1 + a)^{k+1} = (1 + a)^k(1 + a) \geq (1 + ka)(1 + a) = 1 + ka + a + ka^2 = 1 + (k + 1)a + ka^2 \geq 1 + (k + 1)a$ yoki $(1 + a)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)a$ kelib chiqadi. Talab bajarildi. Demak matematik induksiya talablariga binoan n ning barcha natural qiymatlarida $(1 + a)^n \geq 1 + na$ bajariladi.

2-misol. $2^{2n} > n^2$ n ning barcha natural qiymatlarida bajarilishini ko‘rsating.

Yeching: 1) $n = 1$ da bu tengsizlik o‘rinli $2 > 1$

2) $n = k$ da bu tengsizlik bajariladi deb faraz qilamiz va $n = k + 1$ uchun isbot qilamiz.

$2^{2(k+1)} = 4^{k+1} = 4 \cdot 4^k = 4^k + 2 \cdot 4^k + 4^k$ ni hosil qilamiz va $4^k = 2^{2k} > k^2$ (farazga binoan), $4^k > k^2 \geq 1$, $k^2 \geq 1$ ekanligini hisobga olgan holda $2^{2(k+1)} > k^2 + 2k^2 + k^2$ yoki $2^{2(k+1)} > k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$ ni hosil qilamiz.

Bundan $2^{2n} > n^2$ barcha natural n uchun bajarilishi kelib chiqadi.

Mustaqil yechish uchun mashqlar

1. n ning barcha natural qiymatlarida $2^n \geq n + 1$ bo‘lishini isbotlang.
2. n ning barcha natural qiymatlarida



$\frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq n$ bo'lishini isbotlang.

3. n natural va $n \geq 3$ bo'lganda $2^n \geq 2n + 1$ bo'lishini isbotlang.

4. Barcha natural n uchun $|\sin x| < n|\sin x|$ bo'lishini isbotlang.

5. Har qanday natural $n \geq 5$ uchun $2^{2n} > n^2$ ekanligini isbotlang.

6. Har qanday natural $n \geq 2$ uchun

$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ bo'lishini isbotlang.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. A.U.Abdusamidov, H.A.Nasimov, U.M.Nosirov, J.H.Husanov “Algebra va matematik analiz asoslari”, akademik litseylar uchun darslik, O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus, kasb-hunar ta'limi markazi, 7-nashr.-T. “O'qituvchi” NMIU, 2008, I qism