



CHEKLI LIMITGA EGA BO'LGAN FUNKSIYALARNING XOSSALAR

Parpiyev Sodiqjon Abdujalilovich

Andijon davlat pedagogika insitituti “Matematika
va informatika” kafedrası o'qituvchisi

Mashrabova Sarvinoz Mo'minjon qizi

Andijon davlat pedagogika insitituti
Fizika yo'nalishi 101-guruh talabasi

Annotatsiya: Ushbu maqolada chekli limitga ega bo'lgan funksiya haqida tushunchalar, misollar ko'rib chiqildi. Bundan tashqari maqolamizda funksiya limiti haqida nazariy ma'lumotlar berib o'tiladi va amaliy qo'llanmalarni taqdim etadi, chunki bu tushuncha ko'plab matematik masalalarni hal qilishda asosiy o'rin tutadi.

Kalit so'zlar: Limit, funksiya, argument, chekli va cheksiz limit, to'plam.

Abstract: This article discusses the concepts and examples of functions with a finite limit. In addition, our article provides theoretical information about the limit of a function and provides practical applications, since this concept plays a key role in solving many mathematical problems.

Keywords: Limit, function, argument, finite and infinite limit, set.

Аннотация: В статье рассматриваются понятия и примеры функций с конечным пределом. Кроме того, в нашей статье даны теоретические сведения о пределе функции и приведены практические приложения, поскольку это понятие играет ключевую роль в решении многих математических задач.

Ключевые слова: Предел, функция, аргумент, конечный и бесконечный предел, множество.

**Kirish:**

Chekli limitga ega bo'lgan funksiyalar ham yaqinlashuvchi ketma-ketliklar singari qator xossalarga ega. Ularnig aksariyatining isbotlari ham yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning mos xossalari isbotlari kabidir. Chunki, yuqorida ko'rinadiki, funksiya limiti tushunchasi sonlar ketma-ketlikning limiti tushunchasiga tayangan holda ta'riflanadi. Shuni e'tiborga olib, quyidagi keltirilgan xossalarning ba'zilarinigina isbotlaymiz, qolgan xossalari isbotlash o'quvchiga tavsiya etiladi.

1. Tengsizlik belgisi bilan ifodalanadigan xossalar. X to'plam berilgan bo'lib, a esa uning limiti nuqtasi bo'lsin. Bu to'plamda $f(x)$ aniqlangan.

1° Agar ushbu $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ limit mavjud bo'lib, $b > p (b < q)$ bo'lsa, a ning yetarli kichik atrofidan olingan $x (x \neq a)$ ning qiymatlarida $f(x) > p (f(x) < q)$ bo'ladi.

Agar ushbu $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ limit mavjud bo'lsa, $b > 0 (b < 0)$ bo'lsa, a ning yetarli kichik atrofidan olingan $x (x \neq a)$ ning qiymatlarida $f(x) > 0 (f(x) < 0)$ bo'ladi.

2° Agar ushbu $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ limit mavjud bo'lsa, a ning yetarli kichik atrofida olingan $x (x \neq a)$ ning qiymatlarida $f(x)$ funksiya chegaralangan bo'ladi.

Isbot. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ bo'lsin. Funksiya limiti ta'rifiga ko'ra $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topiladiki,

$$x \in U_\delta(a) \text{ uchun } f(x) \in U_\varepsilon(b)$$

bo'ladi. Demak, argument x ning barcha $x \in U_\delta(a)$ qiymatlarida funksiyaning mos qiymatlari $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ oraliqda bo'ladi. Bu esa $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi $U_\delta(a)$ atrofida chegaralanganligini ko'rsatadi.

1-eslatma. Funksiya chegaralanganligidan uning chekli limitga ega bo'lishi har doim ham kelib chiqarvermaydi. Masalan, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ funksiya chegaralangan, ammo $x \rightarrow 0$ da bu funksiya limitga ega emas.

X to'plamdagi $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalar aniqlangan bo'lib, a esa X ning limit nuqtasi bo'lsin.



3° Agar argument x ning a nuqtaning biror $U_\delta(a)$ atrofidan olingan barcha qiymatlarida

$$f_1(x) \leq f_2(x)$$

tengsizlik o'rinli bo'lib, $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$ limitlar mavjud bo'lsa, u holda

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

4° Agar argument x ning a nuqtaning biror $U_\delta(a)$ atrofidan olingan barcha qiymatlarida

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa va $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$ limitlar mavjud bo'lib,

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = b$$

bo'lsa, u holda

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

bo'ladi.

4° ning isboti. Shartga ko'ra $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = b$ limit mavjud. Demak, $\forall \varepsilon > 0$ son uchun a nuqtaning shunday $U_\delta(a)$ atrofi mavjudki, x ning barcha $x \in U_\delta(a)$ qiymatlarida $f_1(x) \in U_\varepsilon(b)$ bo'ladi. Shunga o'xshash, $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = b$ limit mavjud bo'lgani uchun o'sha $\forall \varepsilon > 0$ son uchun a nuqtaning shunday $U_\delta(a)$ atrofi mavjudki, x ning barcha $x \in U_\delta(a)$ qiymatlarida $f_2(x) \in U_\varepsilon(b)$ bo'ladi.

Agar $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ sonlarining kichigini δ deb, a nuqtaning $U_\delta(a)$ atrofi olinsa, unda

$$U_\delta(a) \subset U_{\delta_1}(a), \quad U_\delta(a) \subset U_{\delta_2}(a)$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi. Natijada har bir $x \in U_\delta(a)$ uchun bir vaqtda

$$f_1(x) \in U_\varepsilon(b), \quad f_2(x) \in U_\varepsilon(b)$$

bo'lib, yuqoridagi tenglamaga binoan $f(x) \in U_\varepsilon(b)$ ham kelib chiqadi.

Demak, har bir $x \in U_\delta(a)$ uchun $f(x) \in U_\varepsilon(b)$ o'rinli. Bu esa $x \rightarrow a$ da $f(x)$ funksiya limitiga ega va $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ bo'lishini ko'rsatadi. Shunday qilib teglik isbotlandi.



Misol. Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

limitini toping.

Ravshanki, bur tomondan $x \cdot \cos \frac{1}{x}$ funksiya uchun $-|x| \leq x \cdot \cos \frac{1}{x} \leq |x|$ tengsizliklar bajariladi, ikkinchi tomondan,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

Demak, yuqoridagi 4^o-xossaga ko'ra $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} = 0$

2. chekli limitga ega bo'lgan funksiyalar ustida arifmetik amallar. X to'plam berilgan bo'lib, a uning limit nuqtasi bo'lsin. Bu to'plamda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar aniqlangan.

1^o Agar $x \rightarrow 0$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar limitga ega bo'lsa, $f(x) \pm g(x)$ funksiya ham limitga ega va

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

tenglik o'rinli.

2^o Agar $x \rightarrow a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar limitga ega bo'lsa, $f(x) \cdot g(x)$ funksiya ham limitga ega va

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

tenglik o'rinli.

1-natija. Agar $x \rightarrow a$ $f(x)$ funksiya limitga ega bo'lsa, unda $k \cdot f(x)$ ($k = \text{const}$) funksiya ham limitga ega va

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

tenglik o'rinli.

2-eslatma. 1) Yuqorida keltirilgan 1^o- va 2^o- xossalar qo'shuvchilar, ko'paytuvchilar soni ixtiyoriy chekli bo'lgan holda ham o'rinli.

2) $x \rightarrow a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning yig'indisi, ko'paytmasi va nisbatidan iborat bo'lgan funksiyalarning limitiga ega bo'lishidan bu funksiyalarning har birining limitga



ega bo'lishi doim kelib chiqavermaydi. Masalan, $f(x)=1-\sin\frac{1}{x}$, $g(x)=\sin\frac{1}{x}$ funksiyalar yig'indisi $f(x)+g(x)=1$ bo'lib, $x \rightarrow 0$ da $f(x)+g(x) \rightarrow 1$ bo'ladi. Ammo $x \rightarrow 0$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning har biri limitga ega emas.

3. Murakkab funksiyalarning limiti. Ko'pchilik hollarda murakkab funksiyaning limitini hisoblashga to'g'ri keladi. Shuning uchun biz quyidagi murakkab funksiya limitini hisoblash imkonini beradigan teoremani keltiramiz.

Faraz qilaylik, biror X to'plamda $t=\varphi(x)$ funksiya aniqlangan va bu qiymatlaridam iborat T to'plamda $y=f(t)$ funksiya aniqlangan bo'lib, ular yordamida murakkab funksiya $y=f(\varphi(x))$ hosil qilingan bo'lsin. Bu murakkab funksiya X to'plamda aniqlangan. Shu bilan birga a son X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

3-teorema. Agar 1) $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)=c$ limit o'rinli bo'lib, a nuqtaning shunday $U_\delta(a)$ atrofi mavjud bo'lsaki, barcha $x \in U_\delta(a)$ lar uchun $\varphi(x) \neq c$ bo'lsa, 2) c nuqta T to'plamning limit nuqtasi bo'lib, $\lim_{t \rightarrow c} f(t)=b$ limit mavjud bo'lsa, u holda $x \rightarrow a$ da murakkab funksiya $y=f(\varphi(x))$ ham limitga ega va

$$\lim_{x \rightarrow a} f(\varphi(x))=b$$

bo'ladi.

Isbot. Shartga ko'ra $\lim_{x \rightarrow a} f(t)=b$ mavjud. Limit ta'rifiga ko'ra $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\sigma > 0$ son topiladiki, barcha $t \in U_\sigma(a)$ lar uchun $f(t) \in U_\varepsilon(b)$ bo'ladi.

Endi shartga ko'ra $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)=c$ limit o'rinli, shu bilan birga a nuqtaning shunday $U_\delta(a)$ atrofi mavjudki, barcha $x \in U_\delta(a)$ lar uchun c tengsizlik o'rinli. U holda yana limit ta'rifiga ko'ra, yuqoridagi $\sigma > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topiladiki, barcha $x \in U_\delta(a)$ lar uchun $\varphi(x) \in U_\sigma(c)$ bo'ladi. Shunday qilib, $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\sigma > 0$ son topiladiki

$$x \in U_\delta(a) \Rightarrow t = \varphi(x) \in U_\sigma(c) \Rightarrow f(t) \in U_\varepsilon(b)$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Bu esa

$$\lim_{t \rightarrow c} f(t) = \lim_{x \rightarrow a} f(\varphi(x))=b$$

bo'lishini ifodalaydi. Teorema isbot bo'ldi.



3-eslatma. Teoremadagi a nuqtaning $U_\delta(a)$ atrofida $\varphi(x) \neq c$ bo'lsin dega shartni $f(t)$ funksiya $t=c$ nuqtada aniqlangan va

$$\lim_{t \rightarrow c} f(t) = f(c) = b$$

tengliklar o'rinli bo'lsin degan shart bilan almashtirish mumkin. Darhaqiqat, agar $x \in U_\sigma(a)$ lar uchun $\varphi(x) \neq c$ bo'lsa, teoremaning isboti ravshan: agar $\varphi(x) = c$ bo'lsa, u holda $\lim_{t \rightarrow c} f(t) = f(c) = b$ bo'lib, $|f(\varphi(x)) - b| = 0$ bo'ladi. Shunday qilib, barcha $x \in U_\sigma(a)$ lar uchun $f(\varphi(x)) \in U_\sigma(b)$ bo'ladi.

Xuddi shunga o'xshash, a , c hamda b larning biri chekli, ikkinchisi cheksiz yoki barchasi cheksiz bo'lganda ham teoremaning o'rinli bo'lishi isbotlanadi.

FOYDALANGAN ADABIYOTLAR:

1. Tao T. Analysis 1, 2. Hindustan Book Agency, India, 2014. Aksoy A. G., Khamsi M. A. A problem book in real analysis. Springer, 2010.
2. Xudoyberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A. Matematik analizdan ma'ruzalar, I, II q. T. "Vorisnashriyot", 2010.
3. Shoimqulov B. A., Tuychiyev T. T., Djumaboyev D. X. Matematik analizdan mustaqil ishlar. T.O 'zbekiston faylasuflari milliy jamiyati", 2008.
4. Gazyev A., Isroilov I., Yaxshiboyev M.U. Matematik analizdan misol va masalalar, 1-qism (o'quv qo'llanma). Turon-iqbol nashriyoti. Toshkent. 2009. 480 bet.
5. Gazyev A., Isroilov I., Yaxshiboyev M.U. Matematik analizdan misol va masalalar, 2-qism (o'quv qo'llanma). «Fan va texnologiyalar» nashriyoti. Toshkent. 2012. 384 bet